2019 年理系

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．$\cos\theta$ は有理数ではないが，$\cos 2\theta$，$\cos 3\theta$ がともに有理数となるような θ の値を求めよ．ただし，p が素数のとき，$\sqrt{p}$ が有理数でないことは証明なしに用いてよい．

考え方　直観的に，条件を満たす θ は 1 個しかなく，それは $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ であることは分かると思います．

$\cos\theta = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，
$\cos 2\theta = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$，
$\cos 3\theta = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

しかし，これ以外の有無について論じないと不正解です．

ポイントは，「有理数の四則演算の結果は必ず有理数である」ことです．

解

θ を，$\cos\theta$ は有理数ではないが，$\cos 2\theta$，$\cos 3\theta$ がともに有理数となる θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．

$\cos 2\theta = \dfrac{p}{q}$ （p，q は互いに素な整数）とおく．

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \dfrac{p}{q}$ より，

$2\cos^2\theta = \dfrac{p}{q} + 1$

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= -3\cos\theta + 4\cos^3\theta \\ &= \cos\theta(-3 + 4\cos^2\theta) \\ &= \cos\theta\left(-3 + \frac{2p}{q} + 2\right) \\ &= \cos\theta\left(\frac{2p}{q} - 1\right)\end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{2p}{q} - 1 \neq 0$ とすると，

$$\cos\theta = \frac{\cos 3\theta}{\dfrac{2p}{q} - 1}$$

となり，$\cos 3\theta$ と $\dfrac{2p}{q} - 1$ はともに有理数だから，$\cos\theta$ も有理数となり矛盾する．

したがって，$\dfrac{2p}{q} - 1 = 0$．　$\therefore\ \dfrac{p}{q} = \dfrac{1}{2}$

よって，$\cos 2\theta = \dfrac{1}{2}$

$0 < 2\theta < \pi$ より，$2\theta = \dfrac{\pi}{3}$．

$$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{6}$$

■

注　上の 解 では，$\cos 2\theta = \dfrac{p}{q}$ とおいて考えましたが，別におかなくてもできます．

解 （別解）

θ を，$\cos\theta$ は有理数ではないが，$\cos 2\theta$，$\cos 3\theta$ がともに有理数となる θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ より，

$2\cos^2\theta = \cos 2\theta + 1$

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= -3\cos\theta + 4\cos^3\theta \\ &= \cos\theta(-3 + 4\cos^2\theta) \\ &= \cos\theta(-3 + 2\cos 2\theta + 2) \\ &= \cos\theta(2\cos 2\theta - 1)\end{aligned}$$

$2\cos 2\theta - 1 \neq 0$ ならば

$$\frac{\cos 3\theta}{2\cos 2\theta - 1} = \cos\theta$$

$\cos 2\theta$，$\cos 3\theta$ がともに有理数なので，

$\dfrac{\cos 3\theta}{2\cos 2\theta - 1}$ も有理数．よって，$\cos\theta$ が無理数であることに矛盾する．

したがって，$2\cos 2\theta - 1 = 0$ である．

$\cos 2\theta = \dfrac{1}{2}$

$0 < 2\theta < \pi$ より，$2\theta = \dfrac{\pi}{3}$．

$$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{6}$$

■

注　いずれの解答も，$\cos\theta$ と $\cos 2\theta$ と $\cos 3\theta$ の関係式

$$\cos 3\theta = \cos\theta(2\cos 2\theta - 1)$$

を利用しています．3 倍角の公式をこのように変形することはあまりなかったかもしれませんね．