2019 年理系

$f(x)=x^3+2x^2+2$ とする．$|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ がともに素数となる整数 n を求めよ．

考え方 前年度（2018）に類題が出題されています．とりあえず，x にいろいろ整数を代入して様子をみるしかありません．

n	$\lvert f(n)\rvert$	素数かどうか
-4	30	×
-3	7	○
-2	2	○
-1	3	○
0	2	○
1	5	○
2	18	×
3	47	○
4	98	×

$|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ がともに素数となる n は $n=-3,\ -2,\ -1,\ 0$ っぽいことが分かりますね．つまり，これら以外はすべて不適であることを証明せねばならないのですが，$|f(n)|$ の数の並びをみて何か気づくことはないでしょうか．

つくづく，昨年の問題に似てますね．

解

$$
\begin{aligned}
&f(n+1)-f(n)\\
&=(n+1)^3+2(n+1)^2+2-(n^3+2n^2+2)\\
&=3n^2+7n+3\\
&=3n^2+3n+4n+3\\
&=3n(n+1)+4n+3
\end{aligned}
$$

$n(n+1)$ は連続 2 整数の積なので偶数であるから，$f(n+1)-f(n)$ は奇数である．

つまり，$f(n)$ と $f(n+1)$ の偶奇性は異なる．

よって，$|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ の偶奇性も異なるので，これらがともに素数になるならば，$|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ のどちらか一方は必ず 2 でなければならない．

(i) $|f(n)|=2$ のとき

（ア）$f(n)=2$ のとき

$n^3+2n^2+2=2$ より，$n^2(n+2)=0$

n は整数なので，$n=0,\ -2$．

（イ）$f(n)=-2$ のとき

$n^3+2n^2+2=-2$ より，$n^2(n+2)=-4$

n は整数なので，n は 4 の約数（±1，±2，±4）に限られるが．いずれも成立しない．

(ii) $|f(n+1)|=2$ のとき

（ウ）$f(n+1)=2$ のとき

$(n+1)^3+2(n+1)^2+2=2$ より，

$(n+1)^2(n+3)=0$

n は整数なので，$n=-1,\ -3$．

（エ）$f(n+1)=-2$ のとき

$(n+1)^3+2(n+1)^2+2=-2$ より，

$(n+1)^2(n+3)=-4$

n は整数なので，$n+1$ は 4 の約数（±1，±2，±4）に限られるが．いずれも成立しない．

以上のことから

$$n=-3,\ -2,\ -1,\ 0$$

■

注 解答でいきなり，$f(n)+f(n+1)$ を計算しているのは，$f(n)$ と $f(n+1)$ の偶奇性が異なることを，予想の段階で気づいているからです．偶奇性が異なることを示すには和（または差）が奇数であることを示すのが基本です．

しかしながら，もっとシンプルに示すこともできます．n の偶奇で場合分けすればよいのです．

$f(n)=n^3+2(n^2+2)$ なので，$f(n)$ の偶奇は n^3 の偶奇と一致します．なので，

n が偶数のとき，$f(n)$ は偶数，$f(n+1)$ は奇数．

n が奇数のとき，$f(n)$ は奇数，$f(n+1)$ は偶数．

であることは明らかです．