2013 年度　奈良県立医大　推薦入試問題(数学)解答

【1】x^{100} を x^2-x+1 で割った余りを求めよ.

解 x^{100} を x^2-x+1 で割った商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$x^{100}=(x^2-x+1)Q(x)+ax+b \cdots ①$$

$x^2-x+1=0$ の解を α とする.

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ より，α は $\alpha^3=-1$ をみたす虚数である.

① の両辺に $x=\alpha$ を代入すると，

$\alpha^{100}=a\alpha+b.$

$\alpha^3=-1$ より，$\alpha^{100}=\alpha\cdot(\alpha^3)^{33}=-\alpha.$

よって，$-\alpha=a\alpha+b.$

$(a+1)\alpha+b=0$

α は虚数で，$a+1$，b は実数なので，

$a+1=0$，$b=0$

よって，$a=-1$，$b=0.$

■

【2】AB，BC，CD，DA を 4 辺とする四角形 ABCD がある．AB = DC かつ AD // BC であることは，四角形 ABCD が平行四辺形であるための$\boxed{}$条件である．次から$\boxed{}$にあてはまる適切なものを選べ.

ア．必要であるが十分でない

イ．十分であるが必要でない

ウ．必要十分

エ．必要でも十分でもない

解

AB = DC かつ AD // BC $\Longrightarrow$ 四角形 ABCD が平行四辺形

は偽である (反例：四角形 ABCD が等脚台形).

四角形 ABCD が平行四辺形 $\Longrightarrow$ AB = DC かつ AD // BC

は真である．したがって，必要条件だが十分条件でない．(ア).

■

【3】 $x=-1+\sqrt{2}i$ のとき，x^4-2x^2 の値を求めよ.

解 $x=-1+\sqrt{2}i$ より，$x+1=\sqrt{2}i.$

$(x+1)^2=-2.$ $x^2+2x+3=0.$

したがって，2 次方程式 $x^2+2x+3=0$ は $x=-1+\sqrt{2}i$ を解にもつ．このとき，$x^2=-2x-3$ なので，

$$\begin{aligned}&x^4-2x^2\\=&x^2(x^2-2)\\=&(-2x-3)(-2x-5)\\=&4x^2+16x+15\\=&4(-2x-3)+16x+15\\=&8x+3\\=&8(-1+\sqrt{2}i)+3\\=&-5+8\sqrt{2}i\end{aligned}$$

■

注 $(x^4-2x^2)\div(x^2+2x+3)$ を筆算による割り算で計算しても良い．そのときの余りが $8x+3$ になる.

【4】△ABC において，3 辺 BC，CA，AB の長さを，それぞれ a，b，c とし，∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A，B，C で表すものとする．次の等式を満たす △ABC はどのような三角形であるか答えよ.

$$b\cos C-c\cos B=a$$

解 $b\cos C-c\cos B=a$ より，

$$b\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-c\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=a$$

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}-\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}=a$$

$$(a^2+b^2-c^2)-(a^2+c^2-b^2)=2a^2$$

$$2b^2-2c^2=2a^2$$

$$a^2+c^2=b^2$$

したがって，角 B が 90° である直角三角形である.

■

【5】 次のように分数を並べた数列がある.

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{6},\ \cdots$$

初項から第 603 項までの和を求めよ.

解 次のように群に分ける.

$$\frac{1}{2}\ \Big|\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\ \Big|\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4}\ \Big|\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\ \Big|\ \frac{1}{6},\ \cdots$$

第 n 群の末項は元の数列の最初から数えて $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 番目である.

$n=34$ のとき，$\dfrac{34(34+1)}{2}=595$

$n=35$ のとき，$\dfrac{35(35+1)}{2}=630$

なので，第 603 項は第 35 群の 8 番目である.

第 n 群に含まれる数の和は

$$\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+1}+\cdots\frac{n}{n+1}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n+1}=\frac{n}{2}$$

なので，初項から第 603 項までの和は,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{34}\frac{k}{2}+\left(\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\cdots\frac{8}{36}\right)\\ =&\frac{1}{2}\,\frac{34(34+1)}{2}+\frac{1}{36}\,\frac{8(8+1)}{2}\\ =&\frac{595}{2}+1=\frac{597}{2}\end{aligned}$$

■

【6】 りんご，みかん，メロンの 3 種類を合わせて 10 個選ぶ．このとき，どの種類も少なくとも 1 個以上選び，りんごは 3 個以下とする選び方は何通りあるか答えよ.

解 みかんの個数を x，メロンの個数を y とする．条件より，$x \geqq 1$，$y \geqq 1$.

(i) りんごを 3 個とるとき.

$$x+y=7 \qquad (x \geqq 1,\ y \geqq 1)$$

を満たす $(x,\ y)$ の組を考えればよく，これは 6 通りある.

(ii) りんごを 2 個とるとき.

$$x+y=8 \qquad (x \geqq 1,\ y \geqq 1)$$

を満たす $(x,\ y)$ の組を考えればよく，これは 7 通り.

(iii) りんごを 1 個とるとき.

$$x+y=9 \qquad (x \geqq 1,\ y \geqq 1)$$

を満たす $(x,\ y)$ の組を考えればよく，これは 8 通り.

よって，合計 21 通り.

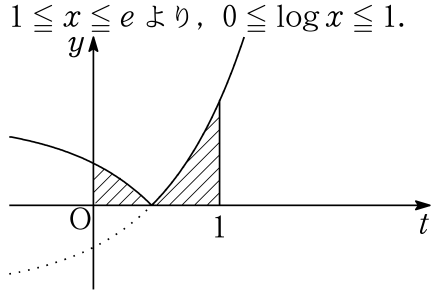
■

【7】 x が $1 \leqq x \leqq e$ の範囲を動く．このとき次の関数の最小値を求めよ.

$$g(x)=\int_0^1 |e^t-x|\,dt$$

解 $e^t-x=0$ となる t は $t=\log x$.

$1 \leqq x \leqq e$ より，$0 \leqq \log x \leqq 1$.



t の関数 $y=|e^t-x|$ のグラフは図のようになるので，$g(x)$ は上図の斜線部の面積を表している.

$$\begin{aligned}g(x)&=\int_0^1 |e^t-x|\,dt\\ &=\int_0^{\log x}(-e^t+x)\,dt+\int_{\log x}^1(e^t-x)\,dt\\ &=\Big[-e^t+xt\Big]_0^{\log x}+\Big[e^t-xt\Big]_{\log x}^1\\ &=(-x+x\log x)-(-1+0)\\ &\qquad+(e-x)-(x-x\log x)\\ &=2x\log x-3x+e-1\end{aligned}$$

$$g'(x)=2(1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x})-3=2\log x-1.$$

$g'(x)=0$ となる x は $x=\sqrt{e}$ であり，$g(x)$ の $1 \leqq x \leqq e$ における増減は

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

となる．よって，$x=\sqrt{e}$ のとき最小となり，そのときの最小値は $g(\sqrt{e})=-2\sqrt{e}+e+1$.

■

【8】 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin 4x}-1}{x\log(1+x)}$$

解

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin 4x}-1}{x\log(1+x)}\\&=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{x\sin 4x}-1}{x\sin 4x}\cdot\frac{x\sin 4x}{x\log(1+x)}\right\}\\&=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{x\sin 4x}-1}{x\sin 4x}\cdot\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{x}{\log(1+x)}\cdot 4\right\}\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin 4x}-1}{x\sin 4x}$ について考える．$x\sin 4x=t$ とおくと，$x\longrightarrow 0$ のとき，$t\longrightarrow 0$ なので，

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin 4x}-1}{x\sin 4x}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-e^0}{t-0}$$

$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^t-e^0}{t-0}$ は，$y=e^x$ のグラフの $x=0$ における接線の傾きを表しているので，1 である．

次に，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log(1+x)}$ について考える．$\log(1+x)=t$ とおくと，$x=e^t-1$ であり，$x\longrightarrow 0$ のとき，$t\longrightarrow 0$ なので，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log(1+x)}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-e^0}{t-0}$$

先ほどと同じ理由により，この極限値は 1 である．

また，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=1$ であるので，以上より，求める極限値は 4.

■

【9】 3 次方程式 $x^3+ax^2+21x+8=0$（a は実数）の解を小さいものから順に $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とする．いま，$\alpha:\beta=\beta:\gamma$ が成立するとき，a の値を求めよ．

解 解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-a\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=21\\ \alpha\beta\gamma=-8\end{cases}$$

$\alpha:\beta=\beta:\gamma$ より，$\beta^2=\alpha\gamma$.

$\alpha\beta\gamma=-8$ より，$\beta^3=-8$.　$\therefore\ \beta=-2$

よって，それぞれに代入すると，

$$\begin{cases}\alpha+\gamma=2-a & \cdots ①\\ -2\alpha-2\gamma+\gamma\alpha=21 & \cdots ②\\ \alpha\gamma=4 & \cdots ③\end{cases}$$

①，③ を ② に代入して，

$-2(2-a)+4=21$　よって，$a=\dfrac{21}{2}$.

■

【10】方程式 $8^x-(a+4)4^x+4(a+1)2^x-4a=0$（$a$ は実数）の実数解がただ一つとなるような a の範囲を求めよ．

解 $2^x=t$ とおく（$t>0$）．このとき，

$t^3-(a+4)t^2+4(a+1)t-4a=0$

$(t-a)(t^2-4t+4)=0$

$(t-a)(t-2)^2=0$

$t=a,\ t=2$

よって，ただ一つの実数解になるためには，$a=2$ で一致するか，あるいは $t=a$ すなわち $2^x=a$ が実数解をもたなければよい．そのための条件は $a\leqq 0$.

よって，$a=2,\ a\leqq 0$

■

【11】 三角形の 3 辺の中点が $(-3,\ -1)$，$(0,\ 3)$，$(4,\ 0)$ であるとき，この三角形の内接円の半径の長さを求めよ．

解 $\mathrm{P}(-3,\ -1)$，$\mathrm{Q}(0,\ 3)$，$\mathrm{R}(4,\ 0)$ とおくと，$\mathrm{PQ}=5$，$\mathrm{QR}=5$，$\mathrm{RP}=5\sqrt{2}$ となるので，三角形 PQR は直角二等辺三角形である．

三角形の 3 辺の中点を結んでできる三角形が直角二等辺三角形になるということは，中点連結定理より，もとの三角形も直角二等辺三角形で，その 3 辺の長さは，10，10，$10\sqrt{2}$ になる．

よって，もとの三角形の面積 S は $S=50$ であり，内接円の半径を r とすると，

$$50=\frac{r}{2}(10+10+10\sqrt{2})$$

$$r=\frac{100}{20+10\sqrt{2}}=\frac{10}{2+\sqrt{2}}$$

■

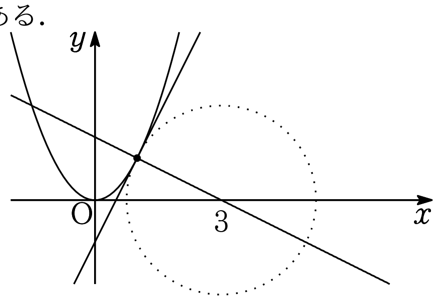
【12】 大，中，小の 3 つのサイコロを同時になげ，大のサイコロの出た目を a，中のサイコロの出た目を b，小のサイコロの出た目を c とする．このとき，$a<b<c$ となる確率を求めよ．

解 $a<b<c$ となる出る目の組合せは，${}_6\mathrm{C}_3=20$ 通りなので，求める確率は，$\dfrac{20}{6^3}=\dfrac{5}{54}$.

■

【13】 放物線 $y=x^2$ と円 $(x-3)^2+y^2=a$ がただ 1 点で交わるとき，a の値を求めよ．

解 図より，放物線 $y=x^2$ と円 $(x-3)^2+y^2=a$ がただ 1 点で交わるときは，すなわち接するときである．



図のように円と放物線が接するとき，接点における放物線の法線が円の中心を通る．

放物線 $y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における法線の方程式は

$$y=-\frac{1}{2t}(x-t)+t^2$$

これが円の中心 $(3,\ 0)$ を通ればよいので，

$$-\frac{3}{2t}+\frac{1}{2}+t^2=0$$

$$2t^3+t-3=0$$

$$(t-1)(2t^2+2t+3)=0 \qquad \therefore\ t=1$$

よって，接点は $(1,\ 1)$ になるので，円の半径は $\sqrt{(3-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{5}$.

したがって，$a=5$

■

【14】 m，n は共に 2 以上の自然数であり，それらの公約数は 1 のみである．いま，$\dfrac{20n}{m}$ および $\dfrac{18m}{n}$ がともに整数となる組 $(m,\ n)$ の個数を求めよ．

解 $\dfrac{20n}{m}$ が整数となる m は，m と n が互いに素なので，m は 20 の約数になる．よって，$m \geqq 2$ より，

$$m=2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20$$

$\dfrac{18m}{n}$ が整数となる n は，m と n が互いに素なので，n は 18 の約数になる．よって，$n \geqq 2$ より，

$$n=2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18$$

したがって，m と n が互いに素になる組合せは，

$m=2$ のとき，$n=3,\ 9$
$m=4$ のとき，$n=3,\ 9$
$m=5$ のとき，$n=2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18$
$m=10$ のとき，$n=3,\ 9$
$m=20$ のとき，$n=3,\ 9$
なので，全部で 13 組．

■

【15】 n を自然数とする．$5^n>6^{50}$ となる最小の n を求めよ．ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．

解 $5^n>6^{50}$ の両辺の常用対数をとると，

$$n\log_{10}5>50\log_{10}6$$

$$n(1-\log_{10}2)>50(\log_{10}2+\log_{10}3)$$

$$n(1-0.3010)>50(0.3010+0.4771)$$

$$n>\frac{50\times 0.7781}{0.6990}=55.65\cdots$$

よって，条件を満たす最小の n は，$n=56$

■