2014 年　奈良県立医科大学　推薦入試問題（数学）

設問ごとに，解答用紙の該当する枠内に解答のみを記入せよ．

【1】 8 個の文字「奈，良，県，立，医，科，大，学」を横 1 列に並べる．
このとき，「奈良医大」という連続した 4 文字が現れるように並べる方法は何通りあるか．

【2】 $\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ$ の値を求めよ．

【3】 平面上に $\triangle \mathrm{ABC}$ がある．この平面上で，次の等式を満たす点 P の軌跡を求めよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

【4】 $0 < \theta < \pi$，$\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\tan\theta - \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\cos\theta}$ を満たす θ の値を求めよ．

【5】 次の値を求めよ．

$$\sum_{r=0}^{10} r^2 \ {}_{10}\mathrm{C}_r$$

【6】 $\triangle \mathrm{ABC}$ の頂点 A から辺 BC へ下ろした垂線の足 H が頂点 B と頂点 C の間にあって $\dfrac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{AC}^2} = \dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{CH}}$ であるとき，$\triangle \mathrm{ABC}$ はどのような形であるか．

【7】 $abc = n$ のとき，

$$\frac{3a}{ab + a + 1} + \frac{3nb}{bc + nb + n} + \frac{3c}{ca + c + n}$$

の値を求めよ．ただし，a，b，c はすべて正の実数とする．

【8】 x の関数 $f(x) = \left(\log_{10} \dfrac{x}{a}\right)\left(\log_{10} \dfrac{x}{b}\right)$ の最小値が $-\dfrac{1}{4}$ であるとき，a，b の値を求めよ．ただし，a，b は $ab = 100$，$a > b$ を満たす正の実数とする．

【9】 2 次方程式 $x^2-3ax+2a-3=0$ が 2 つの相異なる整数解をもつ．このときの a の値を求めよ．

【10】 次の 2 つの不等式を同時に満たす整数 x の個数が 2 個であるためには a はどんな範囲であればよいか．

$$(x+2)(3x-1)(x-4)>0,\quad (x-2)(x-a)\leqq 0$$

【11】 a を 10 以下の正の整数とする．数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=a,\quad a_{n+1}=a\sqrt[4]{a_n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．このとき，極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ が存在して整数となるような a をすべて求めよ．

【12】 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=2a_n+n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

【13】 集合 X の要素の個数を $|X|$ で表す．集合 U とその部分集合 A_1，A_2，A_3，A_4 についてその要素の個数が以下のように定まっているとする．$|U|=300$，$1\leqq i\leqq 4$ を満たす任意の自然数 i に対して $|A_i|=64$ が成り立ち，$1\leqq i<j\leqq 4$ を満たす任意の自然数 i，j に対して $|A_i\cap A_j|=16$ が成り立ち，$1\leqq i<j<k\leqq 4$ を満たす任意の自然数 i，j，k に対して $|A_i\cap A_j\cap A_k|=4$ が成り立ち，$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=1$ が成り立つ．このとき，集合 U の要素の中で A_1，A_2，A_3，A_4 のいずれの集合にも含まれていない要素の個数を求めよ．

【14】 直線 $l: y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{10}{3}$ と円 $C_1: x^2+y^2-2x+4y-220=0$ がある．中心が l 上にあって，円 C_1 に外接する半径 10 の円を C_2 とし，C_2 の方程式を求めよ．

【15】 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点で，直線 $x+2y-4=0$ からの距離が最大となるような座標を求めよ．