2014年　奈良県立医大　推薦入試問題（数学）解答

【1】 8個の文字「奈，良，県，立，医，科，大，学」を横1列に並べる．
このとき，「奈良医大」という連続した4文字が現れるように並べる方法は何通りあるか．

解 「奈良医大」の4文字をひとかたまりに考えて，全部で5文字の順列とみなせばよい．よって，$5! = 120$ 通り．

■

【2】 $\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ$ の値を求めよ．

解 三角関数の和積公式より

$$\begin{aligned}
&\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ \\
=&2\cos\frac{230^\circ}{2}\cos\frac{120^\circ}{2} + \cos 65^\circ \\
=&2\cos 115^\circ\cos 60^\circ + \cos 65^\circ \\
=&\cos 115^\circ + \cos 65^\circ \\
=&2\cos\frac{180^\circ}{2}\cos\frac{50^\circ}{2} \\
=&2\cos 90^\circ\cos 25^\circ = 0
\end{aligned}$$

■

【3】 平面上に $\triangle\mathrm{ABC}$ がある．この平面上で，次の等式を満たす点Pの軌跡を求めよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

解 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2 - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 - \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$$

ここでABの中点をMとおくと，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AM}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{CM}}\right|$$

したがって，点Pの軌跡は，中心がM，半径CMの円である。

■

【4】 $0 < \theta < \pi$，$\theta \neq \frac{\pi}{2}$ のとき，
$\tan\theta - \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\cos\theta}$ を満たす θ の値を求めよ．

解 $\tan\theta - \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\cos\theta}$ より，

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta - \sin\theta$$

$$(\sin\theta + \cos\theta)(\sin\theta - \cos\theta) = -(\sin\theta - \cos\theta)$$

$$(\sin\theta + \cos\theta + 1)(\sin\theta - \cos\theta) = 0$$

$\sin\theta + \cos\theta = -1$ または $\sin\theta - \cos\theta = 0$

(i) $\sin\theta + \cos\theta = -1$ のとき，

$\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -1$.

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$0 < \theta < \pi$ より，$\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{5}{4}\pi$ なので，

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$$

よって，不適．

(ii) $\sin\theta - \cos\theta = 0$ のとき，

$\sin\theta = \cos\theta$. $0 < \theta < \pi$ より，$\theta = \frac{\pi}{4}$

(i)(ii) より，$\theta = \frac{\pi}{4}$

■

【5】 次の値を求めよ．

$$\sum_{r=0}^{10} r^2\ {}_{10}\mathrm{C}_r$$

解 $r\,{}_n\mathrm{C}_r = n\ {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ なので

$$\sum_{r=0}^{10} r^2\ {}_{10}\mathrm{C}_r = \sum_{r=1}^{10} r^2\ {}_{10}\mathrm{C}_r = \sum_{r=1}^{10} r\cdot 10\ {}_9\mathrm{C}_{r-1}$$

$=10\sum_{r=1}^{10} r\ {}_9\mathrm{C}_{r-1}=10\sum_{r=0}^{9}(r+1)\ {}_9\mathrm{C}_r$

$=10\left\{\sum_{r=0}^{9} r\ {}_9\mathrm{C}_r+\sum_{r=0}^{9}\ {}_9\mathrm{C}_r\right\}=10\left\{\sum_{r=1}^{9} r\ {}_9\mathrm{C}_r+2^9\right\}$

$=10\left\{\sum_{r=1}^{9} 9\ {}_8\mathrm{C}_{r-1}+2^9\right\}=10\left\{9\sum_{r=1}^{9}\ {}_8\mathrm{C}_{r-1}+2^9\right\}$

$=10(9\cdot 2^8+2^9)=10\cdot 2^8\cdot 11=28160$

■

✎注　まともに計算した方が意外に早いかもしれません．

【6】 △ABC の頂点 A から辺 BC へ下ろした垂線の足 H が頂点 B と頂点 C の間にあって $\dfrac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{AC}^2}=\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{CH}}$ であるとき，△ABC はどのような形であるか．

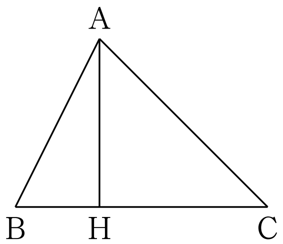
解　図より，

$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{BH}^2$,

$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{CH}^2$.

条件式に代入して

$$\frac{\mathrm{AH}^2+\mathrm{BH}^2}{\mathrm{AH}^2+\mathrm{CH}^2}=\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{CH}}$$



$(\mathrm{AH}^2+\mathrm{BH}^2)\cdot\mathrm{CH}=(\mathrm{AH}^2+\mathrm{CH}^2)\cdot\mathrm{BH}$

$\mathrm{AH}^2\cdot\mathrm{CH}+\mathrm{BH}^2\cdot\mathrm{CH}=\mathrm{AH}^2\cdot\mathrm{BH}+\mathrm{CH}^2\cdot\mathrm{BH}$

$\mathrm{AH}^2(\mathrm{CH}-\mathrm{BH})=\mathrm{BH}\cdot\mathrm{CH}(\mathrm{CH}-\mathrm{BH})$

$(\mathrm{CH}-\mathrm{BH})(\mathrm{AH}^2-\mathrm{BH}\cdot\mathrm{CH})=0$

よって, $\mathrm{CH}-\mathrm{BH}=0$ または $\mathrm{AH}^2-\mathrm{BH}\cdot\mathrm{CH}=0$

(i) $\mathrm{CH}-\mathrm{BH}=0$ のとき, すなわち, $\mathrm{CH}=\mathrm{BH}$ のとき,

△ABC は AB = AC の二等辺三角形である．

(ii) $\mathrm{AH}^2-\mathrm{BH}\cdot\mathrm{CH}=0$ のとき，すなわち $\mathrm{AH}^2=\mathrm{BH}\cdot\mathrm{CH}$ のとき,

$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{BH}^2=\mathrm{BH}\cdot\mathrm{CH}+\mathrm{BH}^2$

$=\mathrm{BH}(\mathrm{CH}+\mathrm{BH})=\mathrm{BH}\cdot\mathrm{BC}$,

$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{CH}^2=\mathrm{BH}\cdot\mathrm{CH}+\mathrm{CH}^2$

$=\mathrm{CH}(\mathrm{BH}+\mathrm{CH})=\mathrm{CH}\cdot\mathrm{BC}$.

よって，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{BH}\cdot\mathrm{BC}+\mathrm{CH}\cdot\mathrm{BC}$

$=(\mathrm{BH}+\mathrm{CH})\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{BC}^2$

つまり, CH = BH のとき, △ABC は, ∠A = 90° の直角三角形である．

■

【7】 $abc=n$ のとき,

$$\frac{3a}{ab+a+1}+\frac{3nb}{bc+nb+n}+\frac{3c}{ca+c+n}$$

の値を求めよ．ただし，a，b，c はすべて正の実数とする．

解

$$\frac{3a}{ab+a+1}+\frac{3nb}{bc+nb+n}+\frac{3c}{ca+c+n}$$
$$=\frac{3a}{ab+a+1}+\frac{3(abc)b}{bc+(abc)b+abc}+\frac{3c}{ca+c+abc}$$
$$=\frac{3a}{ab+a+1}+\frac{3ab}{1+ab+a}+\frac{3}{a+1+ab}$$
$$=\frac{3a+3ab+3}{ab+a+1}=\frac{3(a+ab+1)}{ab+a+1}=3$$

■

【8】 x の関数 $f(x)=\left(\log_{10}\dfrac{x}{a}\right)\left(\log_{10}\dfrac{x}{b}\right)$ の最小値が $-\dfrac{1}{4}$ であるとき，a，b の値を求めよ．ただし，a，b は $ab=100$，$a>b$ を満たす正の実数とする．

解

$f(x)=(\log_{10}x-\log_{10}a)(\log_{10}x-\log_{10}b)$

$\quad=(\log_{10}x)^2-(\log_{10}a+\log_{10}b)\log_{10}x+(\log_{10}a)(\log_{10}b$

$\quad=(\log_{10}x)^2-(\log_{10}ab)\log_{10}x+(\log_{10}a)(\log_{10}b)$

$\quad=(\log_{10}x)^2-2\log_{10}x+(\log_{10}a)(\log_{10}b)$

$\quad=(\log_{10}x-1)^2-1+(\log_{10}a)(\log_{10}b)$

したがって，$\log_{10}x=1$ すなわち $x=10$ のとき，最小値 $-1+(\log_{10}a)(\log_{10}b)$ となる．これが，$-\dfrac{1}{4}$ に等しいので，$(\log_{10}a)(\log_{10}b)=\dfrac{3}{4}$.

したがって，連立方程式

$$\begin{cases}\log_{10}a+\log_{10}b=2\\(\log_{10}a)(\log_{10}b)=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

を解けばよい．$\log_{10}a$，$\log_{10}b$ は 2 次方程式 $t^2-2t+\dfrac{3}{4}=0$ の解だから，これを解いて $t=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{2}$.

$a>b$ より，$\log_{10}a=\dfrac{3}{2}$，$\log_{10}b=\dfrac{1}{2}$.

よって，$a=10\sqrt{10}$，$b=\sqrt{10}$.

■

【9】 2 次方程式 $x^2-3ax+2a-3=0$ が 2 つの相異なる整数解をもつ．このときの a の値を求めよ．

解 2 つの整数解を α，β $(\alpha<\beta)$ とおくと，解と係数の関係より，$\alpha+\beta=3a$，$\alpha\beta=2a-3$．

よって，$\alpha\beta=2\cdot\dfrac{\alpha+\beta}{3}-3$

$\alpha\beta-\dfrac{2}{3}\alpha-\dfrac{2}{3}\beta+3=0$

$\left(\alpha-\dfrac{2}{3}\right)\left(\beta-\dfrac{2}{3}\right)-\dfrac{4}{9}+3=0$

$(3\alpha-2)(3\beta-2)=-23$

$\alpha<\beta$ より，

$(3\alpha-2,\ 3\beta-2)=(-23,\ 1),\ (-1,\ 23)$

このうち，α，β が整数になるのは，

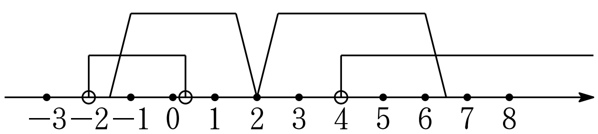
$(3\alpha-2,\ 3\beta-2)=(-23,\ 1)$ ときで，$\alpha=-7$，$\beta=1$．よって，$a=-2$．

■

【10】 次の 2 つの不等式を同時に満たす整数 x の個数が 2 個であるためには a はどんな範囲であればよいか．

$(x+2)(3x-1)(x-4)>0$，$(x-2)(x-a)\leqq 0$

解 $(x+2)(3x-1)(x-4)>0$ の解は，$y=(x+2)(3x-1)(x-4)$ のグラフので $y>0$ の部分，すなわち x 軸よりも上部なので，$-2<x<\dfrac{1}{3}$，$4<x$．



したがって，求める a の条件は，

$a\leqq-1$，　$6\leqq a<7$

■

【11】 a を 10 以下の正の整数とする．数列 $\{a_n\}$ を

$a_1=a$，$a_{n+1}=a\sqrt[4]{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

で定める．このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ が存在して整数となるような a をすべて求めよ．

解 漸化式より数列の各項は正なので，$a_{n+1}=a\sqrt[4]{a_n}$ の両辺の対数をとると，

$\log a_{n+1}=\log a\sqrt[4]{a_n}$

$\log a_{n+1}=\log a+\dfrac{1}{4}\log a_n$

$\log a_n=b_n$ とおくと，$b_{n+1}=\dfrac{1}{4}b_n+\log a$ より，

$b_{n+1}-\dfrac{4}{3}\log a=\dfrac{1}{4}\left(b_n-\dfrac{4}{3}\log a\right)$

$b_n-\dfrac{4}{3}\log a=\left(b_1-\dfrac{4}{3}\log a\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=0$ より，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{4}{3}\log a=\log a^{\frac{4}{3}}$．

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=a^{\frac{4}{3}}$ になり，これが整数となるような 10 以下の正の整数 a は，$a=1$，8．

■

【12】 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

解 $a_{n+1}=2a_n+n$ が

$$a_{n+1}+p(n+1)+q=2(a_n+pn+q)$$

と変形できたとする．このとき

$$a_{n+1}=2a_n+pn+q-p$$

なので，係数比較して，$p=1$，$q-p=0$ より，$p=q=1$．したがって，$a_{n+1}=2a_n+n$ は，

$$a_{n+1}+(n+1)+1=2(a_n+n+1)$$

と変形できる．このとき数列 $\{a_n+n+1\}$ は初項 a_1+1+1，公比 2 の等比数列なので，

$$a_n+(n+1)=(a_1+1+1)2^{n-1}=3\cdot2^{n-1}$$

よって，$a_n=3\cdot2^{n-1}-n-1$

■

【13】 集合 X の要素の個数を $|X|$ で表す．集合 U とその部分集合 A_1，A_2，A_3，A_4 についてその要素の個数が以下のように定まっているとする．$|U|=300$，$1 \leqq i \leqq 4$ を満たす任意の自然数 i に対して $|A_i|=64$ が成り立ち，$1 \leqq i < j \leqq 4$ を満たす任意の自然数 i，j に対して $|A_i \cap A_j|=16$ が成り立ち，$1 \leqq i < j < k \leqq 4$ を満たす任意の自然数 i，j，k に対して $|A_i \cap A_j \cap A_k|=4$ が成り立ち，$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|=1$ が成り立つ．このとき，集合 U の要素の中で A_1，A_2，A_3，A_4 のいずれの集合にも含まれていない要素の個数を求めよ．

解 包含排除法則により

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\
=&|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4| \\
&-(|A_1 \cap A_2|+\cdots) \\
&+(|A_1 \cap A_2 \cap A_3|+\cdots) \\
&-|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
=&64 \times 4 - 16 \times {}_4\mathrm{C}_2 + 4 \times {}_4\mathrm{C}_3 - 1 \\
=&175
\end{aligned}$$

求める集合の要素は

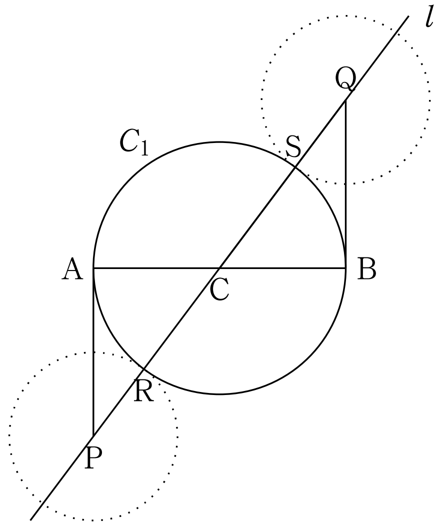
$$\begin{aligned}
&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| \\
=&|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}| \\
=&|U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\
=&300-175=125
\end{aligned}$$

■

【14】 直線 $l: y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{10}{3}$ と円 C_1 : $x^2+y^2-2x+4y-220=0$ がある．中心が l 上にあって，円 C_1 に外接する半径 10 の円を C_2 とし，C_2 の方程式を求めよ．

解 $x^2+y^2-2x+4y-220=0$ より，$(x-1)^2+(y+2)^2=225=15^2$．よって，円 C_1 は中心 $(1,\ -2)$，半径 15 の円である．

また，直線 l はこの中心を通っていることに注目する．



さて，図のように A，B，C(中心)．P，Q，R，S を定める．AC $=$ CB $=15$ で，直線 l の傾きは $\dfrac{4}{3}$ なので AP $=$ BQ $=20$．よって，PC $=$ QC $=25$ となるので，PR $=$ QS $=10$．つまり，図の点 P と点 Q が円 C_2 の中心である．C$(1,\ -2)$ なので，

P$(1-15,\ -2-20)=(-14,\ -22)$．

Q$(1+15,\ -2+20)=(16,\ 18)$．

よって，求める円の方程式は

$(x+14)^2+(y+22)^2=100$

$(x-16)^2+(y-18)^2=100$

■

【15】 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点で，直線 $x+2y-4=0$ からの距離が最大となるような座標を求めよ．

解 楕円上の点を $(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおく．このとき直線 $x+2y-4=0$ との距離 d は

$$\begin{aligned}
d&=\frac{|2\cos\theta+2\sin\theta-4|}{\sqrt{1^2+2^2}} \\
&=\frac{2}{\sqrt{5}}|\sin\theta+\cos\theta-2| \\
&=\frac{2}{\sqrt{5}}\left|\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-2\right|
\end{aligned}$$

したがって，$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$ のとき d は最大となる．このとき，$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\pi$ より，$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$．よって，求める楕円上の点は，$\left(-\dfrac{2}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$．

■