2015年　奈良県立医大　推薦入試問題 (数学) 解答

【1】　点 P$(x,\ y)$ が次の条件を満たすとき，その軌跡は $\boxed{}$ $= 0$ である．$\boxed{}$ に入る式を求めよ．点 F$(4,\ 0)$ からの距離 PF と，y 軸との距離 PH の比の値 $\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}} = \sqrt{5}$ である．

解　$\mathrm{PF} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$, $\mathrm{PH} = |x|$ より，

$$\frac{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}{|x|} = \sqrt{5}$$

$$(x-4)^2 + y^2 = 5x^2$$

$$4x^2 - y^2 + 8x - 16 = 0$$

■

【2】　4つの数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を次のように定める．

$$x_1 = 2, \qquad y_1 = 1,$$

$$x_{n+1} = 5x_n + 4y_n + 3, \quad y_{n+1} = -2x_n - y_n - 1$$

$$a_n = x_n + y_n + 1, \qquad b_n = 3x_n + 6y_n$$

このとき，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

解

$x_{n+1} = 5x_n + 4y_n + 3 \ \cdots$ ①

$y_{n+1} = -2x_n - y_n - 1 \ \cdots$ ②

① + ② より，

$$x_{n+1} + y_{n+1} = 3x_n + 3y_n + 2$$

$$a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1) + 2$$

$a_{n+1} = 3a_n$．$a_1 = x_1 + y_1 + 1 = 4$

$$a_n = a_1 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1}$$

① × 3 + ② × 6 より，

$$3x_{n+1} + 6y_{n+1} = 3x_n + 6y_n + 3$$

$b_{n+1} = b_n + 3$．$b_1 = 3x_1 + 6y_1 = 12$

$$b_n = b_1 + (n-1)\cdot 3 = 12 + 3(n-1) = 3n + 9$$

■

【3】

$$f(\theta) = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin 3\theta}{\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)} + \frac{\sin 3\theta}{\sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)}$$

とする．$0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$f(\theta)$ の最大値と最小値を求めよ．

考え方　今年度の問題の中で一番ムツカシイかもしれません．上手くやるなら次の方法ですが，思いつかないでしょう．

解

$$\sin 3\theta = \sin 3\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$$

なので，

$$f(\theta) = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin 3\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)} + \frac{\sin 3\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)}{\sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)}$$

となる．

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{\sin\alpha} = 3 - 4\sin^2\alpha$$

より，

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 3 - 4\sin^2\theta + 3 - 4\sin^2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + 3 - 4\sin^2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 9 - 4\left(\sin^2\theta + \sin^2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)\right) \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) &= \sin\theta\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\theta\sin\frac{2\pi}{3} \\ &= -\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) &= \sin\theta\cos\frac{4\pi}{3} + \cos\theta\sin\frac{4\pi}{3} \\ &= -\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned} &\sin^2\theta + \sin^2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \\ &= \sin^2\theta + \left(-\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^2 \\ &= \sin^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta + \frac{3}{4}\cos^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta + \frac{3}{4}\cos^2\theta \\ &= \frac{3}{2}\sin^2\theta + \frac{3}{2}\cos^2\theta \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

したがって，$f(\theta)=9-4\times\dfrac{3}{2}=3$ となり，$f(x)$ は定数関数なので，$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$f(\theta)$ の最大値と最小値は共に 3.

■

✏注　通常は次のようにやるでしょう.

$$
\begin{aligned}
&f(\theta)\\
=&\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin 3\theta}{-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}+\frac{\sin 3\theta}{-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}\\
=&\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}+\frac{2\sin 3\theta}{\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta}-\frac{2\sin 3\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}\\
=&\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}+\frac{2\sin 3\theta\{(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)-(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)\}}{(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)}\\
=&\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}+\frac{2\sin 3\theta\cdot 2\sin\theta}{3\cos^2\theta-\sin^2\theta}\\
=&\frac{3\sin\theta-4\sin^3\theta}{\sin\theta}+\frac{2(3\sin\theta-4\sin^3\theta)\cdot 2\sin\theta}{3(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta}\\
=&3-4\sin^2\theta+\frac{2\sin\theta(3-4\sin^2\theta)\cdot 2\sin\theta}{3-4\sin^2\theta}\\
=&3-4\sin^2\theta+4\sin^2\theta\\
=&3
\end{aligned}
$$

■

【4】　ある製品は，A 工場で 40 %，B 工場で 40 %，C 工場で 20 %生産されていて，A 工場では 3 %，B 工場では 2 %，C 工場では 1 %の不合格品がそれぞれできる．この製品から取り出した 1 個が不合格品であるとき，それが C 工場の製品である確率を求めよ.

解　取り出した 1 個が不合格品であるという事象を X，C 工場の製品であるという事象を C で表すと，求める確率は条件付き確率 $P_X(C)$ である.

$$
\begin{aligned}
&P_X(C)\\
=&\frac{P(X\cap C)}{P(X)}\\
=&\frac{\frac{20}{100}\times\frac{1}{100}}{\frac{40}{100}\times\frac{3}{100}+\frac{40}{100}\times\frac{2}{100}+\frac{20}{100}\times\frac{1}{100}}\\
=&\frac{20}{220}\\
=&\frac{1}{11}
\end{aligned}
$$

■

【5】　1800 の正の約数 (1 及び 1800 自身も含む) の総和を求めよ.

解　$1800=2^3\times3^2\times5^2$ より，正の約数の総和は

$$
\begin{aligned}
&(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+5+5^2)\\
=&15\times13\times31=6045
\end{aligned}
$$

■

【6】　正四面体 (T) の一辺の長さと正八面体 (O) の一辺の長さが等しいとき，T の体積は O の体積の何倍か求めよ.

考え方　それぞれの体積の求め方は省略します．医学部受験生なら説明するまでもないでしょう.

解　それぞれの 1 辺の長さを a とおくとき，

正四面体の体積は $\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

正八面体の体積は $\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

で与えられる．従って，一辺の長さが等しいとき，正四面体の体積は正八面体の体積の $\dfrac{1}{4}$ 倍.

■

【7】　最長の対角線の長さが 4 である正十六角形の面積を求めよ．ただし，解答には三角関数を含まないこととする.

解　円に内接する正十六角形を考えると，対称性より最長の対角線は円の直径に等しい.

つまり，半径 2 の円に内接する正十六角形の面積を求めればよい.

$$S=\frac{1}{2}\times2^2\times\sin\frac{45}{2}^\circ\times16=32\sin\frac{45}{2}^\circ$$

$\sin\dfrac{45}{2}^\circ=\sqrt{\dfrac{1-\cos45^\circ}{2}}$ より，

$$S=32\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=16\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

■

【8】 α は第 1 象限の角，β は第 3 象限の角で，

$$\sin\alpha = \frac{4}{5},\quad \cos\beta = -\frac{24}{25}$$

であるとき，$\alpha+\beta$ は第何象限の角か求めよ．

解 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ より，$\cos\alpha > 0$，$\sin\beta < 0$.

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

$\sin\beta = -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -\sqrt{1-\left(-\frac{24}{25}\right)^2} = -\frac{7}{25}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \frac{4}{5}\times\left(-\frac{24}{25}\right) + \frac{3}{5}\times\left(-\frac{7}{25}\right) = -\frac{117}{125} < 0$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= \frac{3}{5}\times\left(-\frac{24}{25}\right) - \frac{4}{5}\times\left(-\frac{7}{25}\right) = -\frac{44}{125} < 0$

したがって，$\alpha+\beta$ は第 3 象限の角である．

■

【9】 x の 2 次方程式

$$x^2+(a+3)x+4=0,\quad x^2-2ax+2a^2-4=0$$

のどちらか一方だけが実数解をもつときの定数 a の値の範囲を求めよ．

解 $x^2+(a+3)x+4=0$ の判別式を D_1，

$x^2-2ax+2a^2-4=0$ の判別式を D_2 とおくと，

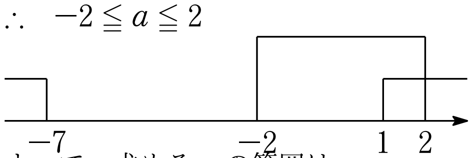
$D_1 \geqq 0$ より，$(a+3)^2-16 \geqq 0$.

$(a+7)(a-1) \geqq 0$. $\therefore\ a \leqq -7,\ 1 \leqq a$

$D_2 \geqq 0$ より，$a^2-(2a^2-4) \geqq 0$.

$a^2-4 \leqq 0$. $(a+2)(a-2) \leqq 0$

$\therefore\ -2 \leqq a \leqq 2$



よって，求める a の範囲は，

$a \leqq -7,\ -2 \leqq a < 1,\ 2 < a$

■

【10】 $f(x) = \left(\log_2\frac{x}{2}\right)\left(\log_2\frac{x}{8}\right)$ とする．$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 8$ のとき，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

解 $\log_2 x = t$ とおくと，$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 8$ より，$-1 \leqq t \leqq 3$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (\log_2 x - \log_2 2)(\log_2 x - \log_2 8) \\ &= (t-1)(t-3) \\ &= t^2-4t+3 \\ &= (t-2)^2-1 \end{aligned}$$

したがって，$t=-1$ のとき最大値 8、$t=2$ のとき最小値 -1 である．

■

【11】

$$f(x) = \frac{x^2-6x+13}{x-3}$$

とする．$x > 3$ のとき，$f(x)$ の最小値を求めよ．

解 $f(x) = \frac{(x-3)^2+4}{x-3} = x-3+\frac{4}{x-3}$

$x>3$ より，$x-3>0$ なので相加相乗平均の大小関係より，

$f(x) \geqq 2\sqrt{(x-3)\times\frac{4}{x-3}} = 2\sqrt{4} = 2$

等号成立は，$x-3 = \frac{4}{x-3}$ のとき，すなわち $(x-3)^2=4$ のときで，$x-3>0$ より，$x=5$.

■

【13】 次の定積分を求めよ．

$$\int_1^e (\log x)^2\,dx$$

解

$$\begin{aligned} &\int_1^e (\log x)^2\,dx \\ =&\int_1^e (x)'(\log x)^2\,dx \\ =&\left[x(\log x)^2\right]_1^e - \int_1^e x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ =&(e-0)-2\int_1^e \log x\,dx \\ =&e-2\left[x\log x - x\right]_1^e \\ =&e-2 \end{aligned}$$

■

【12】 空間内に 2 つの定点 A，B があり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 4$ である．点 P が次を満たしながら動くときどのような図形を描くか求めよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} = -3$$

解 $(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = -3$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -3$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\right|^2 - \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}{4} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -3$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\right|^2 = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}{4} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} - 3$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\right|^2 = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}{4} - 3$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\right|^2 = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}{4} - 3$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\right|^2 = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|^2}{4} - 3$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\right|^2 = \frac{4^2}{4} - 3 = 1$$

よって，点 P は 2 点 A，B の中点を中心とする半径 1 の球面上にある．

■

【14】 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$$

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{2\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} = \frac{1}{2}$$

■

【15】 $x^2-x-2=0$ は，$x=2$ であるための $\boxed{}$．次から $\boxed{}$ にあてはまる適切なものを選べ．

ア．必要条件であるが十分条件でない

イ．十分条件であるが必要条件でない

ウ．必要十分条件である

エ．必要条件でも十分条件でもない

解 $x^2-x-2=0$ の解は，$x=-1,\ 2$ なので，

$$x^2-x-2=0 \ \underset{\bigcirc}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}\ x=2$$

したがって，必要条件であるが十分条件でないので（ア）．

■