2016年　奈良県立医大　推薦入試問題（数学）解答

【1】次の条件を満たす放物線をグラフとする2次関数が一つに定まるものを，すべて選べ．ただし，y が x の2次関数のもののみを考える．
ア．3点 $(-4,\ 13)$，$(-1,\ 1)$，$(2,\ 7)$ を通る．
イ．軸が $x=3$ であり2点 $(-3,\ 8)$，$(9,\ 8)$ を通る．
ウ．頂点が $(3,\ 8)$ で点 $(5,\ 1)$ を通る．
エ．グラフが x 軸に接していて，軸が $x=2$ であり，点 $(5,\ 9)$ を通る．

解　アについて

$y=ax^2+bx+c$ とおき3点の座標を代入すると

$$\begin{cases}16a-4b+c=13\\ a-b+c=1\\ 4a+2a+c=7\end{cases}$$

この連立方程式を解くと，$a=b=c=1$ と一意に解ける．つまり2次関数は一つに定まる．

イについて

$y=a(x-3)^2+q$ とおき2点の座標を代入すると，

$$\begin{cases}36a+q=8\\ 36a+q=8\end{cases}$$

この連立方程式を一意に解くことはできない．つまり2次関数は一つに定まらない．

ウについて

$y=a(x-3)^2+8$ とおき点 $(5,\ 1)$ を代入すると，

$$4a+8=1$$

この方程式を解くと，$a=-\dfrac{7}{4}$ と一意に解ける．つまり2次関数は一つに定まる．

エについて

$y=a(x-2)^2$ とおき点 $(5,\ 9)$ を代入すると，

$$9a=9$$

この方程式を解くと，$a=1$ と一意に解ける．つまり2次関数は一つに定まる．

よって，以上より，2次関数が一つに定まるのは（ア）（ウ）（エ）．

■

【2】　関数

$$f(x)=x^6+x^4+5x^2+5$$

の最小値を求めよ．

解　$x^2=t$ とおく．

t の3次関数 $y=t^3+t^2+5t+5$ の $t\geqq 0$ における最小値を考えればよい．

$y'=3t^2+2t+5=3\left(t+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{14}{3}>0$ なので，y は単調増加．したがって，$t\geqq 0$ における最小値は $t=0$ のとき，つまり $x=0$ のときである．このとき最小値5.

■

【3】　表と裏の出る確率が同様に確からしいコインを10回投げる．表が8回以上出る確率を求めよ．ただし，答えは百分率（%）で表し，小数第2位を四捨五入することとする．

解

$${}_{10}\mathrm{C}_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_{10}\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^0$$
$$=\frac{{}_{10}\mathrm{C}_2+{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_0}{2^{10}}=\frac{45+10+1}{1024}=\frac{56}{1024}=\frac{7}{128}$$

百分率で表すと，

$$\frac{700}{128}=\frac{175}{32}=5.468\cdots\fallingdotseq 5.5(\%)$$

■

【4】

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^3 x\,dx$$

を求めよ．

解　$\cos x=t$ とおくと，$-\sin x\ dx=dt$

より,

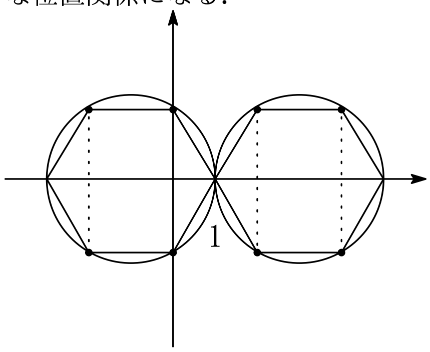
$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^3 x \, dx \\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^2 x \sin x \, dx \\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x (1-\cos^2 x) \sin x \, dx \\
=&\int_1^0 t^2(1-t^2)(-dt) \\
=&\int_0^1 t^2(1-t^2) \, dt \\
=&\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right]_0^1 \\
=&\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}
\end{aligned}
$$

■

【5】 1 を解にもつ実数係数の方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の他の 2 つの解を α, β とする．複素数平面上で 1, α, β が面積 $6\sqrt{3}$ の正六角形の異なる 3 頂点になっているという．この条件を満たす c の値を求めよ．

解 まず，面積 $6\sqrt{3}$ の正六角形は半径 2 の円に内接している．

次に，α と β は互いに共役な複素数だから，これら複素数平面上で実軸対称の位置にある．つまり，α と β の垂直 2 等分線が実軸になる．この垂直 2 等分線上に点 1 が存在せねばならないので，下のような位置関係になる．



よって，$\alpha\beta$ の組合せとして考えられるのは，

$\alpha\beta = (-2+\sqrt{3}i)(-2-\sqrt{3}i) = 7$

$\alpha\beta = (+\sqrt{3}i)(-\sqrt{3}i) = 3$

$\alpha\beta = (2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i) = 7$

$\alpha\beta = (4+\sqrt{3}i)(-4-\sqrt{3}i) = 19$

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の 3 つの解が 1, α, β なので，解と係数の関係より，$\alpha\beta = -c$.

したがって，c の値として考えられるのは，$c = -3$, -7, -19

■

【6】 実数 x, y が

$$x^2 + y^2 = 1$$

を満たすとき,

$$(x+y)^2$$

の最大値を求めよ．

解 $x^2 + y^2 = 1$ より，$x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ とおける．

$x+y = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ より，$(x+y)^2 = 2\sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

よって，$(x+y)^2$ の最大値は 2．このとき，$(x, y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

■

【7】方程式 $x^2 - (4\log_{10} 2)x + (\log_{10} a)^2 = 0$ $(a > 0)$ が実数解をもたないような a の範囲を求めよ．

解 判別式を D とすると，$D < 0$.

$(2\log_{10} 2)^2 - (\log_{10} a)^2 < 0$

$(2\log_{10} 2 + \log_{10} a)(2\log_{10} 2 - \log_{10} a) < 0$

$(\log_{10} a + 2\log_{10} 2)(\log_{10} a - 2\log_{10} 2) > 0$

$\log_{10} a < -2\log_{10} 2$, $2\log_{10} 2 < \log_{10} a$

$10 > 1$ なので，$a < \frac{1}{4}$, $4 < a$

$a > 0$ より，$0 < a < \frac{1}{4}$, $4 < a$

■

【8】

$$y = \sin x \cos x + \sin x + \cos x$$

の最大値と最小値を求めよ．

解 $\sin x + \cos x = t$ とおく．両辺を 2 乗して，$1 + 2\sin x \cos x = t^2$.

$\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$.

また，$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ より $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$.

よって，t の 2 次関数 $y=\dfrac{t^2-1}{2}+t$ の $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における最大最小を考えればよい.

$y=\dfrac{t^2+2t-1}{2}=\dfrac{(t+1)^2-2}{2}$

したがって，$t=-1$ のとき最小値 -1

$t=\sqrt{2}$ のとき最大値 $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$

■

【9】　次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$$

解　$f(x)=e^x$ とおく．$f'(x)=e^x$ であるから，平均値の定理より，

$e^x-e^{\sin x}=(x-\sin x)e^c$

となる c が，x と $\sin x$ の間に存在する.

$x\longrightarrow 0$ のとき，$\sin x\longrightarrow 0$ なので，$c\longrightarrow 0$.

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{c\to 0}e^c=1$

■

【10】　2 つの平面 $2x-3y+z=1$，$3x+2y-z=-1$ の交線を含み，ベクトル $(1,\ 2,\ 3)$ に平行な平面の方程式を求めよ.

解

2 つの平面 $2x-3y+z=1$，$3x+2y-z=-1$ の交線を含む平面の方程式は，

$$2x-3y+z-1+k(3x+2y-z+1)=0 \cdots ①$$

とおける．ただし，平面 $3x+2y-z=-1$ は表すことはできないが，この平面の法線ベクトル $(3,\ 2,\ -1)$ とベクトル $(1,\ 2,\ 3)$ は垂直ではないので条件を満たさない.

さて，① は，

$$(2+3k)x+(-3+2k)y+(1-k)z+k-1=0$$

となり，法線ベクトル $(2+3k,\ -3+2k,\ 1-k)$.

これがベクトル $(1,\ 2,\ 3)$ と垂直であればよいので，

$1(2+3k)+2(-3+2k)+3(1-k)=0$

$-1+4k=0.\qquad k=\dfrac{1}{4}$

よって，求める平面の方程式は ① に $k=\dfrac{1}{4}$ を代入して，

$2x-3y+z-1+\dfrac{1}{4}(3x+2y-z+1)=0$

$8x-12y+4z-4+3x+2y-z+1=0$

$11x-10y+3z-3=0$

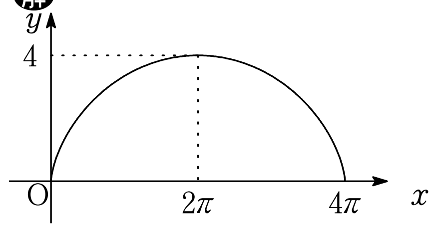
■

【11】　サイクロイド

$$x=2(\theta-\sin\theta),\qquad y=2(1-\cos\theta)$$

の $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の部分と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

解



$\displaystyle\pi\int_0^{4\pi}y^2\,dx$

$\displaystyle=\pi\int_0^{2\pi}y^2\,\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$

$\displaystyle=\pi\int_0^{2\pi}4(1-\cos\theta)^2\cdot 2(1-\cos\theta)\,d\theta$

$\displaystyle=8\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^3\,d\theta$

$\displaystyle=8\pi\int_0^{2\pi}(1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta)\,d\theta$

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=0$

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta=\pi$

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta+3\cos\theta}{4}\,d\theta=0$

よって，求める体積は $8\pi(2\pi+3\pi)=40\pi^3$

■

【12】 3 つの実数 a, b, c がこの順で等差数列をなし，a, c, b の順で等比数列をなす．さらに $abc=8$ であるとき，a, b, c の値を求めよ．

解

a, b, c の順で等差数列をなすので，

$2b=a+c$ … ①

a, c, b の順で等比数列をなすので，

$c^2=ab$ … ②

$abc=8$ より，$c^3=8$．よって，$c=2$．

①② に $c=2$ を代入して解くと，

$(2b-2)b=4$．$b^2-b-2=0$

$(b+1)(b-2)=0$．$b=-1,\ 2$

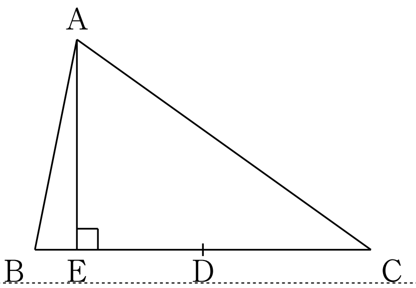
$b=-1$ のとき $a=-4$

$b=2$ のとき $a=2$

$(a,\ b,\ c)=(2,\ 2,\ 2),\ (-4,\ -1,\ 2)$

■

【13】 下の図のように $\angle\mathrm{B}=2\angle\mathrm{C}$, $\mathrm{AB}=12$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ がある．辺 BC の中点を D，頂点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とする．このとき，線分 DE の長さを求めよ．



解 $\angle\mathrm{C}=\theta$ とおくと，$\angle\mathrm{B}=2\theta$ なので，

正弦定理より，$\dfrac{12}{\sin\theta}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin 2\theta}$

$\mathrm{AC}=\dfrac{12}{\sin\theta}\times\sin 2\theta=24\cos\theta$

よって，$\mathrm{CE}=\mathrm{AC}\cos\theta=24\cos^2\theta$

また，$\mathrm{BE}=12\cos 2\theta$ なので，

$\mathrm{BC}=24\cos^2\theta+12\cos 2\theta$.

D は BC の中点なので，

$\mathrm{BD}=12\cos^2\theta+6\cos 2\theta$

よって，$\mathrm{DE}=\mathrm{BD}-\mathrm{BE}$

$=12\cos^2\theta+6\cos 2\theta-12\cos 2\theta$

$=12\cos^2\theta-6\cos 2\theta$

$=12\cos^2\theta-6(2\cos^2\theta-1)=6$

■

【14】 a, b, m は実数とする．a, b が実数の範囲を動くとき，不等式

$$m(a^2+b^2)\geqq(a+b)^2$$

が常に成り立つような m の最小値を求めよ．

解 (i) $a=0$ のとき，$mb^2\geqq b^2$

$(m-1)b^2\geqq 0$．$b^2\geqq 0$ なので，この不等式が常に成立するための m の条件は $m\geqq 1$.

(ii) $a\neq 0$ のとき，不等式の両辺を a^2 で割って，

$m\left\{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2\right\}\geqq 1+2\left(\dfrac{b}{a}\right)+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2$

$\dfrac{b}{a}=t$ とおくと，

$m(1+t^2)\geqq 1+2t+t^2$

$(m-1)t^2-2t+m-1\geqq 0$

この t についての不等式が任意の t で成立するための条件を考える．

$m=1$ のとき，$-2t-1\geqq 0$ であり，任意の t で成立するわけではないので不適．

よって，$m\neq 1$ なので，求める条件は，2 次方程式 $(m-1)t^2-2t+m-1=0$ の判別式を D とすると，$m-1>0$ かつ $D\leqq 0$．これらを解くと，$m\geqq 2$ を得る．

(i)(ii) より $m\geqq 2$ なので，m の最小値は 2.

■

【15】 関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ とする．このとき導関数 $f'(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ．

解 $f'(x)=-\dfrac{(1+e^{-x})'}{(1+e^{-x})^2}=\dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

$=\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{-x}+e^{-2x}}=\dfrac{1}{e^x+2+e^{-x}}$

$e^{-x}>0$ なので，相加相乗平均の大小関係より，

$e^x+e^{-x}\geqq 2\sqrt{e^{-x}e^x}=2$

よって，$f'(x)\leqq\dfrac{1}{2+2}=\dfrac{1}{4}$

等号成立は $e^x=e^{-x}$，$e^{2x}=1$ より，$x=0$ のとき．

したがって，$x=0$ のとき $f'(x)$ は最大値 $\dfrac{1}{4}$

■