2017年1月28日実施　奈良県立医科大学　推薦入試問題（数学）

【1】　以下の文章の空欄に適切な数，式または数学記号を入れて文章を完成させよ．

実数全体で定義された x の関数

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

と正の実数 a を含む関数

$$g(x)=x^2-\frac{1}{a}\log\left(e^{ax}+e^{-ax}\right)$$

を考える．

(1) $f'(x)$ が取り得る値の範囲は $\boxed{\text{ア}} < f'(x) \leqq \boxed{\text{イ}}$ で，$f(x)$ が取り得る値の範囲は $\boxed{\text{ウ}} < f(x) < \boxed{\text{エ}}$

(2) $g'(x)$ を f と a と x を用いて書くと $g'(x)=2x-\boxed{\text{オ}}$.

また，$0<a<\boxed{\text{カ}}$ のとき，$g(x)$ が極小となる点の個数は $\boxed{\text{キ}}$．$a>\boxed{\text{カ}}$ のとき，$g(x)$ が極小となる点の個数は $\boxed{\text{ク}}$.

【2】　以下の文章の空欄に適切な数，式または数学記号を入れて文章を完成させよ．

条件

$$a_0=p,\quad a_1=q,\quad a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n\quad (n\geqq 0)$$

によって定める数列 $\{a_n\}$ を考える．ただし，p，q は $p^2+q^2\neq 0$ なる実数である．この数列の一般項は $a_n=\boxed{\text{ア}}$ （$n\geqq 0$）と書ける．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\log\left(a_n{}^2+1\right)=\begin{cases}\boxed{\text{イ}} & \left(\boxed{\text{エ}}\neq 0 \text{ の場合}\right)\\ \boxed{\text{ウ}} & \left(\boxed{\text{エ}}=0 \text{ の場合}\right)\end{cases}$$

【3】　以下の問いに答えよ．ただし，答のみ記入すればよい．

方程式

$$5z^4-12z^3+30z^2-12z+5=0$$

は $1+2i$ を解としてもつ．ただし，i は虚数単位とする。その他3個の解を $a+bi$（a，b は実数）の形で求めよ．

【4】 以下の文章の空欄に適切な数，式または数学記号を入れて文章を完成させよ．

初めに黒石を 4 個と白石を 4 個用意する．次に袋を 4 つ用意し，それぞれの袋に黒石白石の区別なしに石を 2 個ずつ入れ，すべての袋を大きな箱に入れる．以下の操作 T を考える．

操作 T : 箱の中から袋を 2 つ取り出し，それらの袋の中の石を一旦片方の袋にすべて集める．石を十分に混ぜた後，石を 2 個取り出し，他方の袋に入れる．

操作 T によって，黒石と白石とが 1 個ずつ入っている袋の数 N は，変動しないか，2 増減する可能性がある．N は 0，2，4 のいずれかで，その変化する様子は以下の通りである．

- $N = 0$ の状態に操作 T を施した後，$N = 2$ になる確率は $\boxed{\text{ア}}$.
- $N = 2$ の状態に操作 T を施した後，$N = 0$ になる確率は $\boxed{\text{イ}}$ で $N = 4$ になる確率は $\boxed{\text{ウ}}$
- $N = 4$ の状態に操作 T を施した後，$N = 2$ になる確率は $\boxed{\text{エ}}$.

【5】 以下の問いに答えよ．ただし，答のみ記入すればよい．

全体集合 U は有限個の要素からなる．また，A，B，C を U の部分集合とする．これら集合の要素の個数について，次のことが分かっている．

$$\begin{cases} A \text{ に含まれない要素の個数は } 51. \\ B \text{ に含まれない要素の個数は } 36. \\ C \text{ に含まれない要素の個数は } 55. \\ A \text{ または } B \text{ に含まれる要素の個数は } 54. \\ B \text{ または } C \text{ に含まれる要素の個数は } 49. \\ B \text{ に含まれるが，} A \text{ にも } C \text{ にも含まれない要素の個数は } 23. \\ A \text{ にも } C \text{ にも含まれる要素の個数は } 0. \end{cases}$$

このとき，U の要素の個数を求めよ．

【6】 以下の文章の空欄に適切な数，式または数学記号を入れて文章を完成させよ．ただし，（ア）と（ソ）には数学用語を入れよ．また，（イ）と（ウ）には本文中にある θ を使ってはならない．（サ）には2個の適切な数式を入れよ．

空間内に相異なる定点 O，P，Q をとり，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をそれぞれ $\vec{p}$，$\vec{q}$ で表す．$\vec{p}$，$\vec{q}$ は互いに平行ではないとする．θ を実数全体を動く媒介変数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \cos\theta\,\vec{p} + \sin\theta\,\vec{q}$$

を考える．以下では $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と表す．まず，この動点 R の軌跡は 3 点 O，P，Q で定まる平面内の曲線である．さらに，θ の値が 2π だけ変化するとき，動点 R は元の位置に戻ってくる．したがって，$\vec{r}$ の長さ $\left|\vec{r}\right|$ には最大値と最小値が存在する．もし最大値と最小値が一致するなら，この曲線は $\boxed{\quad ア \quad}$ になる．以下では最大値と最小値が一致しない場合を考える．$\vec{r}$ の長さの平方を計算するにあたって，まず定数 a，b，c を次のように定める．

$$a = \left|\vec{p}\right|^2 - \left|\vec{q}\right|^2, \quad b = 2\vec{p}\cdot\vec{q}, \quad c = \left|\vec{p}\right|^2 + \left|\vec{q}\right|^2$$

ここで，もし $a = b = 0$ ならば，$\left|\vec{r}\right|$ は一定となり，最大値と最小値が一致しないという仮定に反するので，今の場合 $a^2 + b^2 \neq 0$ であることがわかる．ここで定数 α を次のように定める．

$$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

これらの定数と媒介変数 θ とを用いて，$\left|\vec{r}\right|^2$ を表すと，$\left|\vec{r}\right|^2 = \boxed{\quad イ \quad} + \boxed{\quad ウ \quad}\sin\left(\boxed{\quad エ \quad}\right)$．したがって一般的に，$\left|\vec{r}\right|$ が最大値をとるのは $\theta = \boxed{\quad オ \quad} + n\pi$（$n$ は整数）のときであり，最小値をとるのは $\theta = \boxed{\quad カ \quad} + n\pi$（$n$ は整数）のときである．θ の値が 2π だけ変化するあいだに，$\left|\vec{r}\right|$ が最大値，最小値をとるのは，それぞれ 2 度あるが，$\left|\vec{r}\right|$ が最大となるときの $\vec{r}$ の一方を $\vec{A}$，また $\left|\vec{r}\right|$ が最小となるときの $\vec{r}$ の一方を $\vec{B}$ で表すと，たとえば，$\vec{A} = \boxed{\quad キ \quad}\,\vec{p} + \boxed{\quad ク \quad}\,\vec{q}$，$\vec{B} = \boxed{\quad ケ \quad}\,\vec{p} + \boxed{\quad コ \quad}\,\vec{q}$．$\left|\vec{r}\right|$ が最大，最小となる他方のベクトル $\vec{r}$ は $\vec{A}$，$\vec{B}$ を使ってそれぞれ $\boxed{\quad サ \quad}$ のように表される．ここで，$\vec{A}$，$\vec{B}$ の内積を計算すると，$\vec{A}\cdot\vec{B} = \boxed{\quad シ \quad}$．$\theta$ の代わりに新たな媒介変数 ϕ を $\phi = \theta + k$（k は定数）の形で導入して $\phi = 0$ のとき $\vec{r} = \vec{A}$ となるように k を定めると，$\vec{r}$ は媒介変数 ϕ を使って $\vec{r} = \boxed{\quad ス \quad}\,\vec{A} + \boxed{\quad セ \quad}\,\vec{B}$ と表せる．曲線の形は媒介変数のとり方によらないので，この式の形から問題の曲線は $\boxed{\quad ソ \quad}$ であることが分かる．