2018 年 1 月 27 日実施　奈良県立医科大学　推薦入試問題（数学）

【1】　以下の問に答えよ．ただし，答のみ記入すればよい．

a を実数とする．x についての 3 次方程式

$$x^3 - 3a^2x + a^4 = 0$$

が相異なる 3 個の実数解を持つような a の範囲を求めよ．

【2】　以下の文章の空欄に適切な数，式または数学記号を入れて文章を完成させよ．

AB $=$ AC である二等辺三角形 ABC とそれに内接する円 C_1，および辺 AB，AC と円 C_1 に接する円 C_2 を考える．C_1 と C_2 の中心をそれぞれ P_1，P_2 とし，C_1 と辺 AB，C_2 と辺 AB の接点をそれぞれ Q_1，Q_2 とする．また C_1 と辺 BC の接点を H とする．C_1 の半径が 1 で $\angle\mathrm{ABC} = 2\theta$ のとき，$t = \tan\theta$ とすると BH の長さは t を用いて $\boxed{\text{ア}}$ と表せる．さらに，C_2 の半径と四角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_1$ の面積は，t の整式としてそれぞれ $\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ と表せる．

【3】　以下の文章の空欄に適切な数，式または数学記号を入れて文章を完成させよ．

複素数 z と整数 n は以下の 2 つの条件を満たしているとする．

条件 (a) : $|z| = 1$
条件 (b) : $z^n + z + 1 = 0$

このような z と n をすべて求めたい．まず，これらの条件より $z+1$ の絶対値は $\boxed{\text{ア}}$ である．さらに，条件 (a) を用いると，z の値は $\boxed{\text{イ}}$ または $\boxed{\text{ウ}}$ となる．このどちらの z に対しても，$z^k = 1$ となるような最小の正整数は $k = \boxed{\text{エ}}$ であり，求める n は $\boxed{\text{オ}}$ で割って余り $\boxed{\text{カ}}$ となるすべての整数である．つまり，

$$n = \boxed{\text{オ}}\, m + \boxed{\text{カ}} \quad (m \text{ は整数})$$

と書ける．

【4】　以下の文章の空欄に適切な数，式または数学記号を入れて文章を完成させよ．

$a_1 = \dfrac{1}{14}$ とすると，式

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{19{a_n}^2 + 16a_n + 4}}{4a_n} - 2 \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

の右辺は 0 でない実数値となり，上式を漸化式とする初項 $a_1 = \dfrac{1}{14}$ の数列 $\{a_n\}$ が定義できる．すべての正整数 n に対し，

$$b_n = \left(\frac{1}{a_n} + 2\right)^2$$

とおくと，数列 $\{b_n\}$ が満たすべき漸化式は $\boxed{\text{ア}}$ となる．したがって，$\{b_n\}$ の一般項は $b_n = \boxed{\text{イ}}$ となる．$a_1 > 0$ なので，ある番号 k までは $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k > 0$ であると仮定する．$a_{k+1} \neq 0$ なので，まず $a_{k+1} < 0$ の場合を考えてみる．数列 $\{a_n\}$ の漸化式より $\dfrac{1}{a_{k+1}} > -2$ なので $a_{k+1} < -\dfrac{1}{2}$ である．このとき，$0 < b_{k+1} < \boxed{\text{ウ}}$ となる．次に，$a_{k+1} > 0$ ならば $b_{k+1} > \boxed{\text{ウ}}$ となる．よって，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m > 0$ かつ $a_{m+1} < 0$ となる m は $\boxed{\text{エ}}$ であり，このとき $a_{m+1} = \boxed{\text{オ}}$，$a_{m+2} = \boxed{\text{カ}}$ である．ただし，オとカは $\dfrac{x}{y + \sqrt{z}}$ の形（x，y，z は整数）で答えよ．

【5】 以下の文章の空欄に適切な数，式または数学記号を入れて文章を完成させよ．

空間に三角形 ABC と点 P がある．以下では位置ベクトルの始点は原点 O とする．点 A，B，C，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$ とする．点 A に関して点 P と対称な点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は $\vec{q} = \boxed{\quad ア \quad}$ である．同様に，点 B に関して点 Q と対称な点 R の位置ベクトル $\vec{r}$ と点 C に関して点 R と対称な点 S の位置ベクトル $\vec{s}$ も求まる．特に点 S が点 P と一致するとき，$\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと，$\vec{p} = \boxed{\quad イ \quad}$ となる．このとき三角形 PQR の面積は三角形 ABC の面積の $\boxed{\quad ウ \quad}$ 倍である．

【6】 以下の問に答えよ．

区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で定義された関数 $f(x)$ が以下の 2 つの条件を満たしているとする．

条件 (a) : $f(0) = f(1) = 0$

条件 (b) : $0 \leqq x_1 \leqq 1$，$0 \leqq x_2 \leqq 1$ なる任意の相異なる x_1，x_2 に対し，

$$|f(x_1) - f(x_2)| < k|x_1 - x_2| \quad （ただし, k は正の定数）$$

(1) $0 < x < 1$ なる任意の x に対し，不等式 $|f(x)| < kx$ と $|f(x)| < k(1-x)$ が成り立つことを示せ．

(2) $0 \leqq x_1 \leqq 1$，$0 \leqq x_2 \leqq 1$ なる任意の x_1，x_2 に対し，不等式 $|f(x_1) - f(x_2)| < \dfrac{k}{2}$ が成り立つことを示せ．