

2019年2月2日実施 奈良県立医科大学 推薦入試問題(数学)

【1】 以下の問に答えよ。ただし、答のみ記入すればよい。

未知数 x に関する方程式 $(x^2 + 1)(x^2 + 3x + 2 + a) - a + a^2 = 0$ を考える。

- (1) 実部が0の複素数を解にもつような実数 a をすべて求めよ。
- (2) (1) で求めたそれぞれの a の値に対して、そのときの方程式の解をすべて求めよ。

【2】 以下の文章の空欄に適切な数、式または数学記号を入れて文章を完成させよ。

床の上にある第0, 1, 2, 3段からなる階段を上下に移動することを考える。ただし、床を第0段とし、初めは床にいるものとする。1度の移動のルールは以下の通りである。

- 床にいる場合は必ず第1段に移動する。
- 第1段にいる場合は、床か第2段のどちらかにそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で移動する。
- 第2段にいる場合は、第1段か第3段のどちらかにそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で移動する。

第3段に到達したらそれ以降は移動しない。

- (1) 3回目の移動後に第3段にいる確率は である。
- (2) 4回目の移動までは第3段に到達せず、5回目の移動後に第1段にいる確率は である。
- (3) 6回目の移動までは第3段に到達せず、7回目の移動後に第3段にいる確率は である。
- (4) $2n$ 回目の移動までは第3段に到達せず、 $(2n + 1)$ 回目の移動後に第3段にいる確率は である。

- 【3】 空欄に適切な数学記号または数学用語を入れて下記の文章を完成させよ。ただし、(サ)、(セ)、(ソ)には数学用語を記入すること。

xyz 空間において、 $x^2 + y^2 = z^2$ で定義される円錐面と $x \sin \theta + z \cos \theta = \cos^2 \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) で定まる平面との交線を考える。この平面を $P(\theta)$ 、交線を $C(\theta)$ と表す。 $\theta = 0$ の時の交線 $C(0)$ は半径 の円である。また、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ の時には、交線 $C\left(\frac{\pi}{2}\right)$ は yz 平面において方程式 $= 0$ で定義される。以下では、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の場合を考える。また、大きさ 1 のベクトルを単位ベクトルと呼ぶ。

- (1) 平面 $P(\theta)$ に垂直な単位法線ベクトルで z 成分が正であるものは $\vec{n} = \left(\text{ウ} \right)$ である。平面 $P(\theta)$ 内に単位ベクトル $\vec{a} = (0, 1, 0)$ を取ることができる。同じく、平面 $P(\theta)$ 内に単位ベクトル \vec{b} を、 \vec{a} に直交し、かつ、その x 成分が正となるようにとると、 $\vec{b} = \left(\text{エ} \right)$ となる。平面 $P(\theta)$ 上に任意に 1 点 A をとり、 \vec{a} と \vec{b} の始点の位置を平面 $P(\theta)$ 上の点 A にとると、平面 $P(\theta)$ の任意の点の位置ベクトル \vec{r} は実数 q_1, q_2 を用いて、 $\vec{r} = \vec{OA} + q_1 \vec{a} + q_2 \vec{b}$ の形に表すことができる。特に、点 A を平面 $P(\theta)$ と z 軸との交点とすると、 $\vec{OA} = \text{オ} \vec{e}_3$ となる。ただし、 $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ とする。
- (2) 上記の (1) の設定のもとで、交線 $C(\theta)$ について考える。 \vec{r} の終点が交線 $C(\theta)$ 上にあるとすると、 q_1, q_2 は

$$q_1^2 + kq_2^2 + lq_2 = m \quad (*)$$

の形の制約をうける。 k, l, m を q_1, q_2 を用いず θ を用いて書くと、 $k = \text{カ}$, $l = \text{キ}$, $m = \text{ク}$ である。いま、 $k = 0$ とすると、 $\theta = \text{ケ}$ となる。この θ の値を θ_0 と表す。このとき、 q_1 と q_2 の関係は となり、曲線 $C(\theta_0)$ は を表す。次に、 $k \neq 0$ の条件のもとで (*) を整理すると、 k, l, m を用いて次のように書ける。

$$q_1^2 + k \left(q_2 + \text{シ} \right)^2 = \text{ス}$$

したがって、 $k > 0$ のとき、つまり $0 < \theta < \theta_0$ のとき、 は正になるので曲線 $C(\theta)$ は である。また $k < 0$ のとき、つまり $\theta_0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、曲線 $C(\theta)$ は となる。

【4】 以下の文章の空欄に適切な数を入れて文章を完成させよ。

正の整数 n に対して、 n の約数の個数を $f(n)$ で、 n の約数の総和を $g(n)$ で表す。例えば、6 の約数は 1, 2, 3, 6 であるから、 $f(6) = 4$ 、 $g(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$ となる。 $n = 2700$ のとき、 $f(2700) = \boxed{\text{ア}}$ であり、 $g(2700) = \boxed{\text{イ}}$ である。また、 $f(10!) = \boxed{\text{ウ}}$ である。さらに、 $\sum_{n=1}^{100} f(n) = \boxed{\text{エ}}$ である。

【5】 以下の問に答えよ。

関数 $f(x)$ は微分可能とする。 $f_1(x) = f(x)$ および $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ ($n = 2, 3, \dots$) によって関数 $f_n(x)$ を定義する。

(1) $f_2(x_0) = x_0$ を満たす実数 x_0 が存在するとする。このとき、 $f'_2(x_0) = f'_2(f(x_0))$ が成り立つことを示せ。

(2) 3 以上のある整数 n に対し、 $f_n(x_0) = x_0$ を満たす実数 x_0 が存在するとする。

また、 $x_k = f_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) とおく。このとき、

$$f'_n(x_0) = f'_n(x_1) = \dots = f'_n(x_{n-1})$$

が成り立つことを示せ。ただし、任意の正の整数 a, b に対して $f_{a+b}(x) = f_a(f_b(x))$ であることを使ってもよい。

⇒注 問題文中の下線部分は原文のままですが、おそらく誤植だと思われます。

誤 $x_k = f_k(x)$

正 $x_k = f_k(x_0)$

こうでないと解けません。試験時間内に訂正があったのでしょうか……