2019年　奈良県立医大　推薦入試問題（数学）解答

【1】　以下の問に答えよ．ただし，答のみ記入すればよい．

未知数 x に関する方程式 $(x^2+1)(x^2+3x+2+a)-a+a^2=0$ を考える．

（1）実部が0の複素数を解にもつような実数 a をすべて求めよ．
（2）（1）で求めたそれぞれの a の値に対して，そのときの方程式の解をすべて求めよ．

解　（1）

（i）実数 $x=0$ を解にもつ場合

$x=0$ を代入すると

$(2+a)-a+a^2=0$

$a^2+2=0$

a は実数なので不適．

（ii）純虚数 $x=qi$（q は実数，$q \neq 0$）を解にもつ場合

$x=qi$ を代入すると

$(-q^2+1)(-q^2+3qi+2+a)-a+a^2=0$

$\{(-q^2+1)(-q^2+2+a)-a+a^2\}+3q(-q^2+1)i=0$

$\{q^4-(3+a)q^2+a^2+2\}+3q(-q^2+1)i=0$

a と q は実数なので，

$$\begin{cases} q^4-(3+a)q^2+a^2+2=0 & \cdots ① \\ 3q(-q^2+1)=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より，$q \neq 0$ なので，$-q^2+1=0$．

$\therefore q^2=1$

① に $q^2=1$ を代入して，

$1-(3+a)+a^2+2=0$

$a^2-a=0$

$a(a-1)=0 \quad \therefore a=0, 1$

（2）

$a=0$ のとき，

$(x^2+1)(x^2+3x+2)=0$

$(x^2+1)(x+1)(x+2)=0$

$x=-1, -2, \pm i$

$a=1$ のとき，

$(x^2+1)(x^2+3x+3)=0$

$x=\pm i, \dfrac{-3\pm\sqrt{3}i}{4}$

■

＜解答＞

（1）	$a=0, 1$
（2）	$a=0$ のとき，$x=-1, -2, \pm i$ $a=1$ のとき，$x=\pm i, \dfrac{-3\pm\sqrt{3}i}{4}$

【2】 以下の文章の空欄に適切な数，式または数学記号を入れて文章を完成させよ．

床の上にある第 0，1，2，3 段からなる階段を上下に移動することを考える．ただし，床を第 0 段とし，初めは床にいるものとする．1 度の移動のルールは以下の通りである．

- 床にいる場合は必ず第 1 段に移動する．
- 第 1 段にいる場合は，床か第 2 段のどちらかにそれぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で移動する．
- 第 2 段にいる場合は，第 1 段か第 3 段のどちらかにそれぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で移動する．

第 3 段に到達したらそれ以降は移動しない．

（1）3 回目の移動後に第 3 段にいる確率は $\boxed{\text{ア}}$ である．

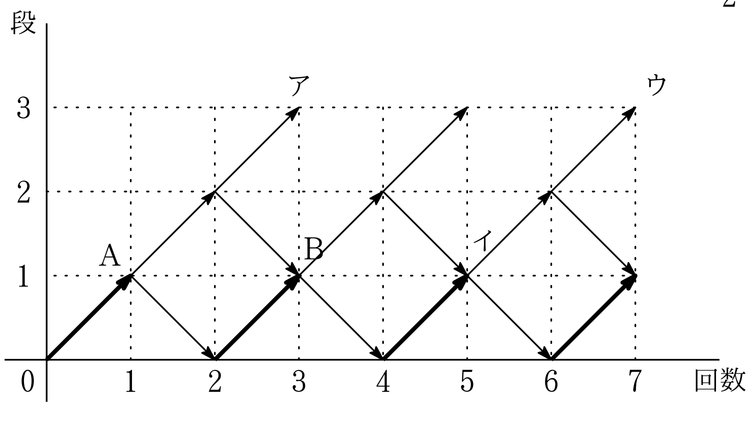
（2）4 回目の移動までは第 3 段に到達せず，5 回目の移動後に第 1 段にいる確率は $\boxed{\text{イ}}$ である．

（3）6 回目の移動までは第 3 段に到達せず，7 回目の移動後に第 3 段にいる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

（4）$2n$ 回目の移動までは第 3 段に到達せず，$(2n+1)$ 回目の移動後に第 3 段にいる確率は $\boxed{\text{エ}}$ である．

解 移動の様子を図式化する．

図中の太矢印の確率が 1 で，その以外の矢印はすべて確率 $\dfrac{1}{2}$ であることに注意する．



（1）上図の（ア）の場所に到達する確率を求める．このとき，3 回連続で段を上がればよいので，

$$1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

（2）上図の（イ）の場所に到達する確率を求める．図中の A から B へ移動する確率は，

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 1=\frac{3}{4}$$

したがって，（イ）に到達する確率は，

$$1\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$$

（3）上図の（ウ）の場所に到達する確率を求める．そのためには，（イ）に到達した後，段を 2 回上がればよいので，

$$\frac{9}{16}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{64}$$

（4）$2n-1$ 回の移動後に 1 段目にいて，そのあと 2 回連続で上がればよい．

$2n-1$ 回の移動後に 1 段目にいるためには，A から B への移動が $n-1$ 回続けばよいので，求める確率は

$$1\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

■

＜解答＞

ア	イ	ウ	エ
$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{9}{16}$	$\dfrac{9}{64}$	$\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$

【3】　空欄に適切な数学記号または数学用語を入れて下記の文章を完成させよ．ただし，(サ)，(セ)，(ソ) には数学用語を記入すること．

xyz 空間において，$x^2+y^2=z^2$ で定義される円錐面と $x\sin\theta+z\cos\theta=\cos^2\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で定まる平面との交線を考える．この平面を $P(\theta)$、交線を $C(\theta)$ と表す．$\theta=0$ の時の交線 $C(0)$ は半径 $\boxed{\text{ア}}$ の円である．また，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ の時には，交線 $C\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ は yz 平面において方程式 $\boxed{\text{イ}}=0$ で定義される．以下では，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の場合を考える．また，大きさ 1 のベクトルを単位ベクトルと呼ぶ．

(1) 平面 $P(\theta)$ に垂直な単位法線ベクトルで z 成分が正であるものは $\vec{n}=\left(\boxed{\text{ウ}}\right)$ である．平面 $P(\theta)$ 内に単位ベクトル $\vec{a}=(0,\ 1,\ 0)$ を取ることができる．同じく，平面 $P(\theta)$ 内に単位ベクトル $\vec{b}$ を，$\vec{a}$ に直交し，かつ，その x 成分が正となるようにとると，$\vec{b}=\left(\boxed{\text{エ}}\right)$ となる．平面 $P(\theta)$ 上に任意に 1 点 A をとり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点の位置を平面 $P(\theta)$ 上の点 A にとると，平面 $P(\theta)$ の任意の点の位置ベクトル $\vec{r}$ は実数 q_1，q_2 を用いて，$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q_1\vec{a}+q_2\vec{b}$ の形に表すことができる．特に，点 A を平面 $P(\theta)$ と z 軸との交点とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boxed{\text{オ}}\ \vec{e_3}$ となる．ただし，$\vec{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$ とする．

(2) 上記の (1) の設定のもとで，交線 $C(\theta)$ について考える．$\vec{r}$ の終点が交線 $C(\theta)$ 上にあるとすると，q_1，q_2 は

$$q_1{}^2+kq_2{}^2+lq_2=m \qquad (*)$$

の形の制約をうける．k, l, m を q_1, q_2 を用いず θ を用いて書くと，$k=\boxed{\text{カ}}$，$l=\boxed{\text{キ}}$，$m=\boxed{\text{ク}}$ である．いま，$k=0$ とすると，$\theta=\boxed{\text{ケ}}$ となる．この θ の値を θ_0 と表す．このとき，q_1 と q_2 の関係は $\boxed{\text{コ}}$ となり，曲線 $C(\theta_0)$ は $\boxed{\text{サ}}$ を表す．次に，$k \neq 0$ の条件のもとで $(*)$ を整理すると，k，l，m を用いて次のように書ける．

$$q_1{}^2+k\left(q_2+\boxed{\text{シ}}\right)^2=\boxed{\text{ス}}$$

したがって，$k>0$ のとき，つまり $0<\theta<\theta_0$ のとき，$\boxed{\text{ス}}$ は正になるので曲線 $C(\theta)$ は $\boxed{\text{セ}}$ である．また $k<0$ のとき，つまり $\theta_0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，曲線 $C(\theta)$ は $\boxed{\text{ソ}}$ となる．

解

平面 $P(\theta): x\sin\theta+z\cos\theta=\cos^2\theta$

平面 $P(0): z=1$

平面 $P\left(\dfrac{\pi}{2}\right): x=0$　（つまり yz 平面）

したがって，円錐面 $x^2+y^2=z^2$ と平面 $P(0)$ との交線 $C(0)$ は，次の連立方程式で定義される．

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ z=1 \end{cases}$$

したがって，$x^2+y^2=1$ となり，中心 $(0,\ 0,\ 1)$，半径 1 の円を表している．

円錐面 $x^2+y^2=z^2$ と平面 $P\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ との交線 $C\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ は，次の連立方程式で定義される．

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ x=0 \end{cases}$$

したがって，$y^2=z^2$　　$\therefore (y+z)(y-z)=0.$

これは，yz 平面上の 2 直線 $z=\pm y$ を表している．

(1) 平面 $P(\theta)$ の法線ベクトルの一つは，

$$(\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta)$$

であるが，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，z 成分は正であり，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より大きさも 1 であるので，このベクトルを求める $\overrightarrow{n}$ としてよい．

$$\therefore\ \overrightarrow{n}=(\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta)$$

$\overrightarrow{b}=(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ とおくと，
$\left|\overrightarrow{b}\right|=1$ より，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$
$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{n}=0$ より，$\alpha\sin\theta+\gamma\cos\theta=0$
$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}=0$ より，$\beta=0$

よって，$\alpha=\cos\theta$，$\gamma=-\sin\theta$ とすれば条件を満たす．

$$\therefore\ \overrightarrow{b}=(\cos\theta,\ 0,\ -\sin\theta)$$

また，平面 $P(\theta)$ と z 軸との交点は，

$x\sin\theta+z\cos\theta=\cos^2\theta$ に $x=y=0$ を代入して，$z\cos\theta=\cos^2\theta$．$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos\theta>0$ なので，$z=\cos\theta$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ 0,\ \cos\theta)=\cos\theta\cdot\overrightarrow{e_3}$$

(2) $\overrightarrow{r}$ を成分表示すると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r}&=\cos\theta\cdot\overrightarrow{e_3}+q_1\overrightarrow{a}+q_2\overrightarrow{b}\\&=(q_2\cos\theta,\ q_1,\ \cos\theta-q_2\sin\theta)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{r}$ の終点が交線 $C(\theta)$ 上にあるので，円錐面の式 $x^2+y^2=z^2$ に代入して，

$$\{q_2\cos\theta\}^2+{q_1}^2=(\cos\theta-q_2\sin\theta)^2$$

$${q_1}^2+(\cos^2\theta-\sin^2\theta){q_2}^2+2\sin\theta\cos\theta q_2=\cos^2\theta$$

$${q_1}^2+\cos2\theta{q_2}^2+\sin2\theta q_2=\cos^2\theta$$

${q_1}^2+k{q_2}^2+lq_2=m$ と係数比較して，

$$k=\cos2\theta,\quad l=\sin2\theta,\quad m=\cos^2\theta$$

$k=0$ とすると，$\cos2\theta=0$
$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{4}(=\theta_0)$
よって，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，

$$k=0,\quad l=1,\quad m=\frac{1}{2}$$

なので，q_1 と q_2 の関係式は，

$${q_1}^2+q_2=\frac{1}{2}$$

$$q_2=-{q_1}^2+\frac{1}{2}$$

したがって，交線 $C(\theta_0)$ は放物線である．

また，(*) より，q_2 の 2 次式とみて平方完成すると，

$${q_1}^2+k\left(q_2+\frac{l}{2k}\right)^2=m+\frac{l^2}{4k}\qquad(**)$$

$$m+\frac{l^2}{4k}=\cos^2\theta+\frac{\sin^2 2\theta}{2\cos2\theta}$$

$k>0$ のとき，つまり $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\cos2\theta>0$ なので，$m+\dfrac{l^2}{4k}>0$ となり，(**) は楕円を表す．

$k<0$ のとき，つまり $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$m+\dfrac{l^2}{4k}$ の符号に関わらず，(**) は双曲線を表す．

■

注 $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$m+\dfrac{l^2}{4k}\neq0$ であることを確認せねばならないので，$m+\dfrac{l^2}{4k}=0$ となる θ を求めてみよう．

$4km+l^2=0$ より，$4\cos2\theta\cos^2\theta+\sin^2 2\theta=0$
$4\cos2\theta\cos^2\theta+4\sin^2\theta\cos^2\theta=0$
$4\cos^2\theta(\cos2\theta+\sin^2\theta)=0$
$4\cos^2\theta(1-2\sin^2\theta+\sin^2\theta)=0$
$4\cos^2\theta(1-\sin^2\theta)=0$
$\cos\theta=0$，$\sin\theta=\pm1$

＜解答＞

ア	イ	ウ	エ	オ
1	$(y+z)(y-z)$	$\sin\theta$，0，$\cos\theta$	$\cos\theta$，0，$-\sin\theta$	$\cos\theta$

カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
$\cos 2\theta$	$\sin 2\theta$	$\cos^2\theta$	$\dfrac{\pi}{4}$	$q_2=-{q_1}^2+\dfrac{1}{2}$	放物線	$\dfrac{l}{2k}$	$m+\dfrac{l^2}{4k}$	楕円	双曲線

✐注　(ウ) と (エ) はベクトルの成分表示の「(　) の中身だけ」という違和感があります.

✐注　円錐面 $x^2+y^2=z^2$ は xy 平面上の直線 $y=x$ を z 軸の周りの回転したものです.

【4】　以下の文章の空欄に適切な数を入れて文章を完成させよ．

正の整数 n に対して，n の約数の個数を $f(n)$ で，n の約数の総和を $g(n)$ で表す．例えば，6 の約数は 1，2，3，6 であるから，$f(6)=4$，$g(6)=1+2+3+6=12$ となる．$n=2700$ のとき，$f(2700)=$ $\boxed{\text{ア}}$ であり，$g(2700)=$ $\boxed{\text{イ}}$ である．また，$f(10!)=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である．さらに，$\displaystyle\sum_{n=1}^{100} f(n)=$ $\boxed{\text{エ}}$ である．

考え方　$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ウ}}$ は大丈夫でしょう．$\boxed{\text{エ}}$ が大変です．1 から 100 までの全ての整数の約数の個数を合計する問題です．私もいろいろ考えましたが，コツコツ調べ上げる以外に，うまい方法はないと思って，非常にブサイクな解法（しかもミスっている笑）を模範解答として紹介していましたが，2022 年 1 月 27 日の午後に生徒の R.Y さんから，非常に素晴らしい解法を教わりました．よって，この解法を本解答とし，私のセンスのない解法を別解としておいておきます（計算ミス部分は訂正済みです）．

解　$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ウ}}$ について．

$2700=2^2\times3^3\times5^2$ なので，

$f(2700)=(2+1)(3+1)(2+1)=3\times4\times3=36$

$g(2700)=(2^0+2^1+2^2)(3^0+3^1+3^2+3^3)(5^0+5^2+5^2)=7\times40\times31=8680$

$10!=2^8\times3^4\times5^2\times7$ なので，

$f(10!)=(8+1)(4+1)(2+1)(1+1)=9\times5\times3\times2=270$

ここから，$\boxed{\text{エ}}$（R.Y さんのアイデア）

整数 1～100 の約数は全て 1～100 のいずれかの整数である．この 100 種類の約数が「どの整数に登場するのか」に注目して数える．

・約数 1 は（1～100 に全ての整数に登場するので）全部で 100 個
・約数 2 は（2，4，6，⋯，100 の整数に登場するので）全部で 50 個
・約数 3 は（3，6，9，⋯，99 の整数に登場するので）全部で 33 個
・約数 4 は（4，8，12，⋯，100 の整数に登場するので）全部で 25 個
・約数 5 は（5，10，15，⋯，100 の整数に登場するので）全部で 20 個

以下同様に考えていく．つまり，

・約数 6 は全部で 16 個
・約数 7 は全部で 14 個
・約数 8 は全部で 12 個
・約数 9 は全部で 11 個
・約数 10 は全部で 10 個
・約数 11 は全部で 9 個
・約数 12 は全部で 8 個
・約数 13，14 はそれぞれ 7 個（計 14 個）
・約数 15，16 はそれぞれ 6 個（計 12 個）
・約数 17～20 はそれぞれ 5 個（計 20 個）
・約数 21～25 はそれぞれ 4 個（計 20 個）
・約数 26～33 はそれぞれ 3 個（計 24 個）
・約数 34～50 はそれぞれ 2 個（計 34 個）
・約数 51～100 はそれぞれ 1 個しか登場しない（計 50 個）

したがって，1 から 100 までの全ての整数の約数の個数の合計は

$$100+50+33+25+20+16+14+12+11+10+9+8+14+12+20+20+24+34+50=482\text{ 個}$$

■

＜解答＞

ア	イ	ウ	エ
36	8680	270	482

✎注　10! の素因数分解は，実際に $10! = 10 \times 9 \times \cdots\cdots \times 2 \times 1$ と書き出して素因数分解しました（そのほうが早いので）．しかし，一般的にやるならば，10! に含まれる素因数の個数をそれぞれ計算で求めることになります．つまり，

10! に含まれる素因数 2 の個数は，$\left[\dfrac{10}{2}\right]+\left[\dfrac{10}{4}\right]+\left[\dfrac{10}{8}\right]=8$

10! に含まれる素因数 3 の個数は，$\left[\dfrac{10}{3}\right]+\left[\dfrac{10}{9}\right]=4$

10! に含まれる素因数 5 の個数は，$\left[\dfrac{10}{5}\right]=2$

10! に含まれる素因数 7 の個数は，$\left[\dfrac{10}{7}\right]=1$

したがって，$10! = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$.

✎注　R.Y さんのアイデアである $\boxed{\text{エ}}$ について．

計算方法を見れば分かりますが，結局，1〜100 の中にある 1 の倍数，2 の倍数，3 の倍数，…，100 の倍数の個数を数えているにすぎません．1〜100 の中にある n の倍数の個数は $\left[\dfrac{100}{n}\right]$ 個なので，結局のところ

$$\sum_{n=1}^{100} f(n) = \sum_{n=1}^{100}\left[\frac{100}{n}\right]$$

と表すことができます．しかし，実際に計算するとなると，やはり **解** のようにするしかありません．

解（別解）※赤阪のセンスのない解法

2 から 100 までの 99 個の整数を素因数分解したときの様子で分類する．

(i)　素因数が 1 種類の自然数について．

まず，100 以下の自然数に含まれる素数は次の 25 個である．このリストを基本に考える．

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

	自然数の個数	それぞれの約数の個数	約数の総数
p 型	25 個（上記）	$1+1=2$ 個	50 個
p^2 型	4 個（$p=2,\ 3,\ 5,\ 7$）	$2+1=3$ 個	12 個
p^3 型	2 個（$p=2,\ 3$）	$3+1=4$ 個	8 個
p^4 型	2 個（$p=2,\ 3$）	$4+1=5$ 個	10 個
p^5 型	1 個（$p=2$）	$5+1=6$ 個	6 個
p^6 型	1 個（$p=2$）	$6+1=7$ 個	7 個
合計	35 個		93 個

(ii)　素因数が 2 種類の自然数について．

（ア）　pq 型 $\Longrightarrow$ $p=2,\ 3,\ 5,\ 7$

$2\times q$ 型　$q=3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 47$ の 14 個

$3\times q$ 型　$q=5,\ 7,\ 11,\ \cdots,\ 31$ の 9 個

$5\times q$ 型　$q=7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19$ の 5 個
$7\times q$ 型　$q=11,\ 13$ の 2 個　以上，合計 30 個
（イ）　p^2q 型 $\Longrightarrow$ $p=2,\ 3,\ 5,\ 7$
$2^2\times q$ 型　$q=3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23$ の 8 個
$3^2\times q$ 型　$q=2,\ 5,\ 7,\ 11$ の 4 個
$5^2\times q$ 型　$q=2,\ 3$ の 2 個
$7^2\times q$ 型　$q=2$ の 1 個　以上，合計 15 個
（ウ）　p^3q 型 $\Longrightarrow$ $p=2,\ 3$
$2^3\times q$ 型　$q=3,\ 5,\ 7,\ 11$ の 4 個
$3^3\times q$ 型　$q=2$ の 1 個　以上，合計 5 個
（エ）　p^4q 型 $\Longrightarrow$ $(p,\ q)=(2,\ 3),\ (2,\ 5)$
（オ）　p^5q 型 $\Longrightarrow$ $(p,\ q)=(2,\ 3)$
（カ）　p^2q^2 型 $\Longrightarrow$ $(p,\ q)=(2,\ 3),\ (2,\ 5)$
（キ）　p^2q^3 型 $\Longrightarrow$ $(p,\ q)=(3,\ 2)$
以上をまとめると，以下のようになる．

	自然数の個数	それぞれの約数の個数	約数の総数
pq 型	30 個	$(1+1)(1+1)=4$ 個	120 個
p^2q 型	15 個	$(2+1)(1+1)=6$ 個	90 個
p^3q 型	5 個	$(3+1)(1+1)=8$ 個	40 個
p^4q 型	2 個	$(4+1)(1+1)=10$ 個	20 個
p^5q 型	1 個	$(5+1)(1+1)=12$ 個	12 個
p^2q^2 型	2 個	$(2+1)(2+1)=9$ 個	18 個
p^2q^3 型	1 個	$(2+1)(3+1)=12$ 個	12 個
合計	56 個		312 個

（iii）異なる 3 個の素数の積で表される数
（ク）　pqr 型
$(p,\ q,\ r)=(2,\ 3,\ 5),\ (2,\ 3,\ 7),\ (2,\ 3,\ 11),\ (2,\ 3,\ 13),\ (2,\ 5,\ 7)$
（ケ）　p^2qr 型
$(p,\ q,\ r)=(2,\ 3,\ 5),\ (2,\ 3,\ 7),\ (3,\ 2,\ 5)$
以上をまとめると，以下のようになる．

	自然数の個数	それぞれの約数の個数	約数の総数
pqr 型	5 個	$(1+1)(1+1)(1+1)=8$ 個	40 個
p^2qr 型	3 個	$(2+1)(1+1)(1+1)=12$ 個	36 個
合計	8 個		76 個

以上，(i)(ii)(iii) の合計が $35+56+8=99$ 個となり，これで 2 から 99 までのすべてを自然数をつくしたことになる．これに，1 の場合を加えれば

$$\sum_{n=1}^{100} f(n)=1+93+312+76=482$$

■

✎注　このセンスの無い解法は，素因数分解の形に注目して，コツコツ調べているだけですが，こんなメンドクサイ議論をするくらいなら，1〜100 の整数を全て因数分解したほうが手っ取り速いです．参考までにやってみましょう．

1		21	$3\cdot7$	41	素数	61	素数	81	3^4
2	素数	22	$2\cdot11$	42	$2\cdot3\cdot7$	62	$2\cdot31$	82	$2\cdot41$
3	素数	23	素数	43	素数	63	$3^2\cdot7$	83	素数
4	2^2	24	$2^3\cdot3$	44	$2^2\cdot11$	64	2^6	84	$2^2\cdot3\cdot7$
5	素数	25	5^2	45	$3^2\cdot5$	65	$5\cdot13$	85	$5\cdot17$
6	$2\cdot3$	26	$2\cdot13$	46	$2\cdot23$	66	$2\cdot3\cdot11$	86	$2\cdot43$
7	素数	27	3^3	47	素数	67	素数	87	$3\cdot29$
8	2^3	28	$2^2\cdot7$	48	$2^4\cdot3$	68	$2^2\cdot17$	88	$2^3\cdot11$
9	3^2	29	素数	49	7^2	69	$3\cdot23$	89	素数
10	$2\cdot5$	30	$2\cdot3\cdot5$	50	$2\cdot5^2$	70	$2\cdot5\cdot7$	90	$2\cdot3^2\cdot5$
11	素数	31	素数	51	$3\cdot17$	71	素数	91	$7\cdot13$
12	$2^2\cdot3$	32	2^5	52	$2^2\cdot13$	72	$2^3\cdot3^2$	92	$2^2\cdot23$
13	素数	33	$3\cdot11$	53	素数	73	素数	93	$3\cdot31$
14	$2\cdot7$	34	$2\cdot17$	54	$2\cdot3^3$	74	$2\cdot37$	94	$2\cdot47$
15	$3\cdot5$	35	$5\cdot7$	55	$5\cdot11$	75	$3\cdot5^2$	95	$5\cdot19$
16	2^4	36	$2^2\cdot3^2$	56	$2^3\cdot7$	76	$2^2\cdot19$	96	$2^5\cdot3$
17	素数	37	素数	57	$3\cdot19$	77	$7\cdot11$	97	素数
18	$2\cdot3^2$	38	$2\cdot19$	58	$2\cdot29$	78	$2\cdot3\cdot13$	98	$2\cdot7^2$
19	素数	39	$3\cdot13$	59	素数	79	素数	99	$3^2\cdot11$
20	$2^2\cdot5$	40	$2^3\cdot5$	60	$2^2\cdot3\cdot5$	80	$2^4\cdot5$	100	$2^2\cdot5^2$

【5】　以下の問に答えよ．

関数 $f(x)$ は微分可能とする．$f_1(x)=f(x)$ および $f_n(x)=f\left(f_{n-1}(x)\right)$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$ によって関数 $f_n(x)$ を定義する．

(1) $f_2(x_0)=x_0$ を満たす実数 x_0 が存在するとする．このとき，$f_2'(x_0)=f_2'\left(f(x_0)\right)$ が成り立つことを示せ．

(2) 3 以上のある整数 n に対し，$f_n(x_0)=x_0$ を満たす実数 x_0 が存在するとする．また，$\underline{x_k=f_k(x_0)}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく．このとき，

$$f_n'(x_0)=f_n'(x_1)=\cdots=f_n'(x_{n-1})$$

が成り立つことを示せ．ただし，任意の正の整数 a，b に対して $f_{a+b}(x)=f_a\left(f_b(x)\right)$ であることを使ってもよい．

✎注　問題文にも書きましたが，下線部分にミスがあると思われますので，訂正しました．

考え方　(1) は何とかなっても，(2) が難しい．とりあえず$\underline{n=5}$あたりで試してみましょう．

$\boxed{n=5\text{ の場合}}$

$f_5(x_0)=x_0$，$x_k=f_k(x_0)$ のとき，

$$f_5'(x_0)=f_5'(x_1)=f_5'(x_2)=f_5'(x_3)=f_5'(x_4)$$

を示せ．

$f_5(x)=f(f_4(x))$ より，$f_5'(x)=f'(f_4(x))\cdot f_4'(x)$.
$f_4(x)=f(f_3(x))$ より，$f_4'(x)=f'(f_3(x))\cdot f_3'(x)$.
$f_3(x)=f(f_2(x))$ より，$f_3'(x)=f'(f_2(x))\cdot f_2'(x)$.
$f_2(x)=f(f_1(x))$ より，$f_2'(x)=f'(f_1(x))\cdot f_1'(x)$.
よって，

$$f_5'(x)=f'(f_4(x))\cdot f'(f_3(x))\cdot f'(f_2(x))\cdot f'(f_1(x))\cdot f_1'(x)\quad\cdots\cdots(※)$$

この式 (※) に $x=x_0$ を代入すると，

$$f_5'(x_0)=f'(f_4(x_0))\cdot f'(f_3(x_0))\cdot f'(f_2(x_0))\cdot f'(f_1(x_0))\cdot f_1'(x_0)$$

$f_1(x)=f(x)$，$x_k=f_k(x_0)$ より，

$$f_5'(x_0)=f'(x_4)\cdot f'(x_3)\cdot f'(x_2)\cdot f'(x_1)\cdot f'(x_0)\quad\cdots\cdots(※※)$$

次に，この式 (※) に $x=x_1$ を代入すると，

$$f_5'(x_1)=f'(f_4(x_1))\cdot f'(f_3(x_1))\cdot f'(f_2(x_1))\cdot f'(f_1(x_1))\cdot f_1'(x_1)$$

$f_1(x)=f(x)$，$x_k=f_k(x_0)$，$f_{a+b}(x)=f_a\left(f_b(x)\right)$ より，
$f_4(x_1)=f_4(f_1(x_0))=f_5(x_0)=x_0$
$f_3(x_1)=f_3(f_1(x_0))=f_4(x_0)=x_4$

$f_2(x_1)=f_2(f_1(x_0))=f_3(x_0)=x_3$
$f_1(x_1)=f_1(f_1(x_0))=f_2(x_0)=x_2$
となるので，

$$f_5'(x_1)=f'(x_0)\cdot f'(x_4)\cdot f'(x_3)\cdot f'(x_2)\cdot f'(x_1)\quad\cdots\cdots(※※※)$$
$$\therefore\quad f_5'(x_0)=f_5'(x_1)$$

式（※※）と（※※※）を比較すれば分かりますが，$f'(x_0)$，$f'(x_1)$，$f'(x_2)$，$f'(x_3)$，$f'(x_4)$ を順番を変えてかけ合わせただけになっています．

$f_5'(x_2)$，$f_5'(x_3)$，$f_5'(x_4)$ も計算すれば分かりますが，全く同じ状況になります．だから，

$$f_5'(x_0)=f_5'(x_1)=f_5'(x_2)=f_5'(x_3)=f_5'(x_4)$$

であることが証明されます．これが $n=5$ の場合です．

このことを一般化すれば良いだけです．

解

(1)

$f_1(x)=f(x)$
$f_2(x)=f(f_1(x))=f(f(x))$
$f_2(x_0)=x_0$ より，$f(f(x_0))=x_0$
$f_2'(x)=f'(f(x))\cdot f'(x)$ より，

$$\begin{aligned}f_2'(f(x_0))&=f'(f(f(x_0)))\cdot f'(f(x_0))\\&=f'(x_0)\cdot f'(f(x_0))\\&=f'(f(x_0))\cdot f'(x_0)\\&=f_2'(x_0)\end{aligned}$$
$$\therefore\quad f_2'(x_0)=f_2'(f(x_0))$$

(2)

$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$ より，$f_n'(x)=f'(f_{n-1}(x))\cdot f_{n-1}'(x)$.
$f_{n-1}(x)=f(f_{n-2}(x))$ より，$f_{n-1}'(x)=f'(f_{n-2}(x))\cdot f_{n-2}'(x)$.
以下，順次繰り返すことにより，

$$f_n'(x)=f'(f_{n-1}(x))\cdot f'(f_{n-2}(x))\cdot\cdots\cdot f'(f_2(x))\cdot f'(f_1(x))\cdot f_1'(x)\quad\cdots\cdots(※)$$

この式（※）に $x=x_0$ を代入すると，

$$f_n'(x_0)=f'(f_{n-1}(x_0))\cdot f'(f_{n-2}(x_0))\cdot\cdots\cdot f'(f_2(x_0))\cdot f'(f_1(x_0))\cdot f_1'(x_0)$$

$f_1(x)=f(x)$，$x_k=f_k(x_0)$ より，

$$f_n'(x_0)=f'(x_{n-1})\cdot f'(x_{n-2})\cdot\cdots\cdot f'(x_2)\cdot f'(x_1)\cdot f'(x_0)$$

となる．

次に，式（※）に $x=x_k$（$1\leqq k\leqq n-1$）を代入すると，

$$f_n'(x_k)=f'(f_{n-1}(x_k))\cdot f'(f_{n-2}(x_k))\cdot\cdots\cdot f'(f_2(x_k))\cdot f'(f_1(x_k))\cdot f_1'(x_k)$$

$f_1(x)=f(x)$，$x_k=f_k(x_0)$，$f_{a+b}(x)=f_a(f_b(x))$ より，

$f_{n-1}(x_k)=f_{n-1}(f_k(x_0))=f_{n+k-1}(x_0)=f_{k-1}(f_n(x_0))=f_{k-1}(x_0)=x_{k-1}$
$f_{n-2}(x_k)=f_{n-2}(f_k(x_0))=f_{n+k-2}(x_0)=f_{k-2}(f_n(x_0))=f_{k-2}(x_0)=x_{k-2}$
…………
$f_{n-k+1}(x_k)=f_{n-k+1}(f_k(x_0))=f_{n+1}(x_0)=f_1(f_n(x_0))=f_1(x_0)=x_1$
$f_{n-k}(x_k)=f_{n-k}(f_k(x_0))=f_n(x_0)=x_0$
$f_{n-k-1}(x_k)=f_{n-k-1}(f_k(x_0))=f_{n-1}(x_0)=x_{n-1}$
…………
$f_3(x_k)=f_3(f_k(x_0))=f_{k+3}(x_0)=x_{k+3}$
$f_2(x_k)=f_2(f_k(x_0))=f_{k+2}(x_0)=x_{k+2}$
$f_1(x_k)=f_1(f_k(x_0))=f_{k+1}(x_0)=x_{k+1}$
したがって，次のように，2 つの集合が一致することがわかる．

$$\therefore\ \{x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_{n-2},\ x_{n-1}\}=\{x_k,\ f_1(x_k),\ f_2(x_k),\ \cdots\cdots,\ f_{n-2}(x_k),\ f_{n-1}(x_k)\}$$

このことから，次の積の値が順番を入れ替えただけなので等しい．

$$\therefore\ f'(x_{n-1})\cdot f'(x_{n-2})\cdot\cdots\cdot f'(x_2)\cdot f'(x_1)\cdot f'(x_0)$$
$$=f'(f_{n-1}(x_k))\cdot f'(f_{n-2}(x_k))\cdot\cdots\cdot f'(f_2(x_k))\cdot f'(f_1(x_k))\cdot f_1'(x_k)$$

$$\therefore\ f_n'(x_0)=f_n'(x_k)$$

$$\therefore\ f_n'(x_0)=f_n'(x_1)=\cdots=f_n'(x_{n-1})$$

■