2020 年 2 月 1 日実施　奈良県立医科大学　推薦入試問題（数学）

【1】　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

以下の積分で定義された数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える．

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx, \qquad b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^n x \, dx$$

（1）$n \geqq 2$ に対し，$a_n = \boxed{\text{ア}} \, a_{n-2}$ が成り立つ．

（2）$n \geqq 2$ に対し，$b_n = \boxed{\text{イ}} \, b_{n-2} - \dfrac{1}{n^2}$ が成り立つ．

（3）$b_n = c_n a_n$ により数列 $\{c_n\}$ を定義すると，$n \geqq 2$ に対し，$c_n = c_{n-2} - \dfrac{1}{\boxed{\text{ウ}} \, a_{n-2}}$ が成り立つ．

【2】　以下の問いに答えよ．

一辺の長さが a の正三角形 ABC を考え，その重心を G とする．

（1）$\overline{\mathrm{AX}} = \overline{\mathrm{BX}}$ をみたす点 X 全体からなる集合はどのような図形か答えよ．

（2）ABC の辺上または内部にある点のうち，$\overline{\mathrm{AP}} \leqq \overline{\mathrm{GP}}$ をみたす点 P 全体からなる図形の面積を求めよ．

（3）ABC の辺上または内部にある点のうち，$\overline{\mathrm{GP}} \leqq \overline{\mathrm{AP}}$，$\overline{\mathrm{GP}} \leqq \overline{\mathrm{BP}}$，$\overline{\mathrm{GP}} \leqq \overline{\mathrm{CP}}$ をみたす点 P 全体からなる図形の面積を求めよ．

【3】　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

空間内の位置ベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ は大きさ 1 で，$\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{b}$ かつ $\overrightarrow{a} \neq -\overrightarrow{b}$ とする．この空間内の原点を始点とする位置ベクトル $\overrightarrow{r}$ に対し，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ を用いて

$$f(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{r} - 2\left(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{a}, \quad g(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{r} - 2\left(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{b}\right)\overrightarrow{b}$$

と定める．ただし，$\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{a}$ 等はベクトルの内積を表す．

(1) ベクトル方程式 $f(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{r}$ をみたす $\overrightarrow{r}$ の終点全体は，原点を通り $\boxed{\text{ア}}$ に直交する平面をなす．

(2) 任意の位置ベクトル $\overrightarrow{r_1}$，$\overrightarrow{r_2}$ に対して，

$$f(\overrightarrow{r_1}) \cdot f(\overrightarrow{r_2}) = g(\overrightarrow{r_1}) \cdot g(\overrightarrow{r_2}) = \boxed{\text{イ}}$$

および

$$g\left(f(\overrightarrow{r_1})\right) \cdot g\left(f(\overrightarrow{r_2})\right) = \boxed{\text{ウ}}$$

が成り立つ．

(2) $H = \{m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b} \mid m,\ n$ は任意の実数$\}$ とする．平面 H 内に，互いに直交する大きさ 1 のベクトル $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ を，$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{a}$ となるようにとる．$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{e_1}$ のなす角を θ とすると，$\overrightarrow{b}$ は

$$\overrightarrow{b} = \cos\theta\overrightarrow{e_1} + \sin\theta\overrightarrow{e_2}$$

と表すことができる．このとき，$g\left(f(\overrightarrow{e_1})\right)$ と $g\left(f(\overrightarrow{e_2})\right)$ を計算すると，

$$g\left(f(\overrightarrow{e_1})\right) = \boxed{\text{エ}}\ \overrightarrow{e_1} + \boxed{\text{オ}}\ \overrightarrow{e_2}$$

$$g\left(f(\overrightarrow{e_2})\right) = -\boxed{\text{オ}}\ \overrightarrow{e_1} + \boxed{\text{エ}}\ \overrightarrow{e_2}$$

【4】　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

A さんは家から大学に行くのに n 回電車に乗る．雨が降っていたので，A さんは傘を 1 本持って家を出発した．A さんは，傘を持って電車に乗るたびに，確率 $\dfrac{1}{3n}$ で傘を車両に置き忘れるものとする．

(1) A さんが傘を忘れずに大学にたどり着ける確率 P_n は $\boxed{\text{ア}}$ である．$1 \leqq k \leqq n$ なる k に対して，k 番目の電車に傘を置き忘れる確率は $\boxed{\text{イ}}$ である．また，$1 \leqq i \leqq j \leqq n$ なる i と j に対して，j 番目の電車から降りたあと，今まで乗ったどれかの電車に傘を置き忘れたことに気づいたとき，i 番目の電車で傘を置き忘れた確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_n = \boxed{\text{エ}}$ である．

(3) $n = 2m$（偶数）とする．n 番目の電車から降りたあと，今まで乗ったどれかの電車に傘を置き忘れたことに気づいたとき，1 番目から m 番目までのどれかの電車に傘を置き忘れた確率を Q_m とすると，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} Q_m = \boxed{\text{オ}}$ である．

【5】　正整数 n に対し，

$$p(n) = n^3 + 2n^2 + n + 2020^2$$

と定めたとき，以下を証明せよ．ただし，立方数とはある正整数 m を用いて m^3 と表される数のことである．

(1) $p(2019)$ は立方数である．

(2) $p(n)$ が立方数となる最大の正整数は 2019 である．