2020年　奈良県立医大　推薦入試問題（数学）解答

【1】　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

以下の積分で定義された数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える．

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx, \qquad b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^n x\,dx$$

(1) $n \geqq 2$ に対し，$a_n = \boxed{\text{ア}}\,a_{n-2}$ が成り立つ．

(2) $n \geqq 2$ に対し，$b_n = \boxed{\text{イ}}\,b_{n-2} - \dfrac{1}{n^2}$ が成り立つ．

(3) $b_n = c_n a_n$ により数列 $\{c_n\}$ を定義すると，$n \geqq 2$ に対し，$c_n = c_{n-2} - \dfrac{1}{\boxed{\text{ウ}}\,a_{n-2}}$ が成り立つ．

考え方　a_n の漸化式は教科書などにも載っており有名ですが，b_n は目新しいです．a_n の場合と同じ発想で計算できますが，なかなか難しいです．

解

(1)

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos^{n-1}(x)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)' \cos^{n-1}(x)\,dx \\
&= \Big[\sin x \cos^{n-1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\left(\cos^{n-1} x\right)'\,dx \\
&= -(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^{n-2} x(-\sin x)\,dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^{n-2} x\,dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cdot\cos^{n-2} x\,dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n-2} x - \cos^n x)\,dx \\
&= (n-1)(a_{n-2} - a_n)
\end{aligned}$$

$$\therefore\ a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2}$$

(2)

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

$$\therefore\ (x\sin x + \cos x)' = x\cos x$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^n x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\cdot\cos^{n-1}x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin x + \cos x)'\cos^{n-1}x\,dx \\
&= \Big[\,(x\sin x + \cos x)\cos^{n-1}x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin x + \cos x)\left(\cos^{n-1}x\right)'\,dx \\
&= -1 - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin x + \cos x)\cdot\cos^{n-2}x(-\sin x)\,dx \\
&= -1 - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-x\sin^2 x - \sin x\cos x)\cos^{n-2}x\,dx \\
&= -1 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\cos^{n-2}x\,dx + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^{n-1}x\,dx \\
&= -1 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x\,dx + (n-1)\Big[-\frac{1}{n}\cos^n x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -1 + (n-1)(b_{n-2} - b_n) + (n-1)\times\frac{1}{n} \\
&= (n-1)(b_{n-2} - b_n) - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ b_n = \frac{n-1}{n}b_{n-2} - \frac{1}{n^2}$$

(3) (1)，(2) より，

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\dfrac{n-1}{n}b_{n-2} - \dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{n-1}{n}a_{n-2}} = \frac{b_{n-2}}{a_{n-2}} - \frac{1}{n(n-1)a_{n-2}}$$

$$\therefore\ c_n = c_{n-2} - \frac{1}{n(n-1)a_{n-2}}$$

■

＜解答＞

ア	イ	ウ
$\dfrac{n-1}{n}$	$\dfrac{n-1}{n}$	$n(n-1)$

【2】　以下の問いに答えよ．

一辺の長さが a の正三角形 ABC を考え，その重心を G とする．

（1）$\overline{\mathrm{AX}}=\overline{\mathrm{BX}}$ をみたす点 X 全体からなる集合はどのような図形か答えよ．

（2）ABC の辺上または内部にある点のうち，$\overline{\mathrm{AP}} \leqq \overline{\mathrm{GP}}$ をみたす点 P 全体からなる図形の面積を求めよ．

（3）ABC の辺上または内部にある点のうち，$\overline{\mathrm{GP}} \leqq \overline{\mathrm{AP}}$，$\overline{\mathrm{GP}} \leqq \overline{\mathrm{BP}}$，$\overline{\mathrm{GP}} \leqq \overline{\mathrm{CP}}$ をみたす点 P 全体からなる図形の面積を求めよ．

考え方　ほぼ直観的に分かりますが，座標できちんと考えてみます．

解

（1）線分 AB の垂直二等分面．

（2）原点を中心とする単位円に内接する正三角形を考える．

$\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathrm{C}\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ と設定しても一般性を失うことはない．

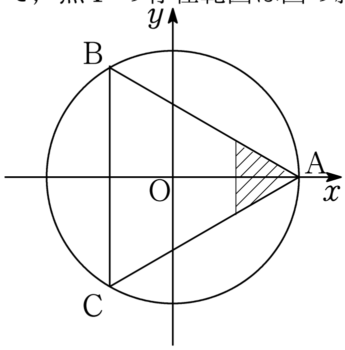
このとき，三角形 ABC の重心 G は原点となる．

$\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおくと，$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(X-1)^2+Y^2}$, $\overline{\mathrm{GP}}=\sqrt{X^2+Y^2}$ なので，$\overline{\mathrm{AP}} \leqq \overline{\mathrm{GP}}$ より，

$$\sqrt{(X-1)^2+Y^2} \leqq \sqrt{X^2+Y^2}$$

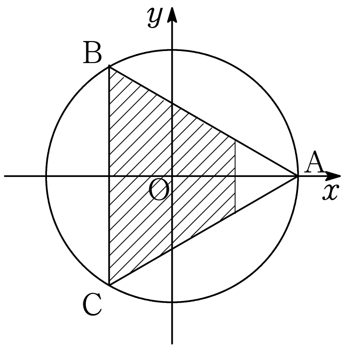
両辺正より，2 乗して整理すると，$X \geqq \dfrac{1}{2}$

点 P は三角形 ABC の辺上または内部の点であるので，点 P の存在範囲は図の斜線部分である．

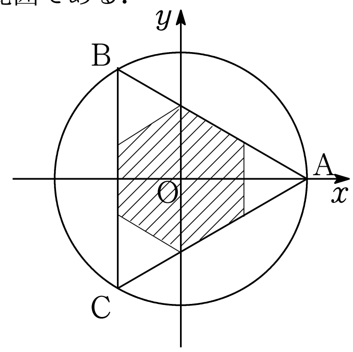


図の斜線部分の面積は三角形 ABC の面積の $\dfrac{1}{9}$ 倍であるので，求める面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times \dfrac{1}{9}=\dfrac{\sqrt{3}}{36}a^2$.

（3）$\overline{\mathrm{GP}} \leqq \overline{\mathrm{AP}}$ をみたす点 P の存在領域は，（2）の場合と不等号の向きが逆であるので，図の斜線部分になる．



図の対称性から，$\overline{\mathrm{GP}} \leqq \overline{\mathrm{BP}}$，$\overline{\mathrm{GP}} \leqq \overline{\mathrm{CP}}$ についても同様であり，これらの共通部分を考えると，以下の図の斜線部分になる．これが求める点 P の存在範囲である．



図の斜線部分の面積は三角形 ABC の面積の $\dfrac{2}{3}$ 倍であるので，求める面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times \dfrac{2}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a^2$.

■

注　(1) は，平面上で考えれば「線分 AB の垂直二等分線」となります．(2) と (3) が平面上での話なので，このように解答しても正解かもしれません．最初の問題文に「平面上で」とか「空間内で」と明記しておくべきでしょう．

【3】　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

空間内の位置ベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ は大きさ 1 で，$\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{b}$ かつ $\overrightarrow{a} \neq -\overrightarrow{b}$ とする．この空間内の原点を始点とする位置ベクトル $\overrightarrow{r}$ に対し，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ を用いて

$$f(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{r} - 2\left(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{a}, \quad g(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{r} - 2\left(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{b}\right)\overrightarrow{b}$$

と定める．ただし，$\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{a}$ 等はベクトルの内積を表す．

(1) ベクトル方程式 $f(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{r}$ をみたす $\overrightarrow{r}$ の終点全体は，原点を通り $\boxed{\text{ア}}$ に直交する平面をなす．

(2) 任意の位置ベクトル $\overrightarrow{r_1}$，$\overrightarrow{r_2}$ に対して，

$$f(\overrightarrow{r_1}) \cdot f(\overrightarrow{r_2}) = g(\overrightarrow{r_1}) \cdot g(\overrightarrow{r_2}) = \boxed{\text{イ}}$$

および

$$g\left(f(\overrightarrow{r_1})\right) \cdot g\left(f(\overrightarrow{r_2})\right) = \boxed{\text{ウ}}$$

が成り立つ．

(2) $H = \{m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b} \mid m,\ n \text{は任意の実数}\}$ とする．平面 H 内に，互いに直交する大きさ 1 のベクトル $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ を，$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{a}$ となるようにとる．$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{e_1}$ のなす角を θ とすると，$\overrightarrow{b}$ は

$$\overrightarrow{b} = \cos\theta\overrightarrow{e_1} + \sin\theta\overrightarrow{e_2}$$

と表すことができる．このとき，$g\left(f(\overrightarrow{e_1})\right)$ と $g\left(f(\overrightarrow{e_2})\right)$ を計算すると，

$$g\left(f(\overrightarrow{e_1})\right) = \boxed{\text{エ}}\ \overrightarrow{e_1} + \boxed{\text{オ}}\ \overrightarrow{e_2}$$

$$g\left(f(\overrightarrow{e_2})\right) = -\boxed{\text{オ}}\ \overrightarrow{e_1} + \boxed{\text{エ}}\ \overrightarrow{e_2}$$

考え方　文字が多くてゴチャゴチャしていますが，やってることは単純なベクトルの計算問題です．図形的な考察をできなくもありませんが，そんなことをせずとも，とにかく文章を読んで，問題文通りに計算すれば解答できます．残念ながら，見掛け倒しの問題であると言わざるを得ません．

解

(1)　$f(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{r}$ より，$\overrightarrow{r} - 2\left(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{a} = \overrightarrow{r}$

よって，$\left(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ なので，$\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{a} = 0$

したがって，$\overrightarrow{r}$ の終点全体は，原点を通り $\overrightarrow{a}$ に直交する平面をなす．

(2)

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{r_1}) \cdot f(\overrightarrow{r_2}) &= \left(\overrightarrow{r_1} - 2\left(\overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{a}\right) \cdot \left(\overrightarrow{r_2} - 2\left(\overrightarrow{r_2} \cdot \overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{a}\right) \\ &= \overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{r_2} - 2\left(\overrightarrow{r_2} \cdot \overrightarrow{a}\right)\left(\overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{a}\right) - 2\left(\overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{a}\right)\left(\overrightarrow{r_2} \cdot \overrightarrow{a}\right) + 4\left(\overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{a}\right)\left(\overrightarrow{r_2} \cdot \overrightarrow{a}\right)\left|\overrightarrow{a}\right|^2 \\ &= \overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{r_2} \quad (\because \left|\overrightarrow{a}\right| = 1) \end{aligned}$$

$g(\overrightarrow{r_1})\cdot g(\overrightarrow{r_2})$ も同様 ($\vec{a}$ が $\vec{b}$ に変わるだけで, $\left|\vec{b}\right|=1$ だから).

$$\therefore\ f(\overrightarrow{r_1})\cdot f(\overrightarrow{r_2})=g(\overrightarrow{r_1})\cdot g(\overrightarrow{r_2})=\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_2}$$

したがって，この結果を用いると,

$$g\left(f(\overrightarrow{r_1})\right)\cdot g\left(f(\overrightarrow{r_2})\right)=f(\overrightarrow{r_1})\cdot f(\overrightarrow{r_2})=\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_2}$$

(3)
$f(\overrightarrow{e_1})=\overrightarrow{e_1}-2\left(\overrightarrow{e_1}\cdot\vec{a}\right)\vec{a}$
$\overrightarrow{e_1}=\vec{a}$ より，$\overrightarrow{e_1}\cdot\vec{a}=\left|\overrightarrow{e_1}\right|^2=1$
よって，$f(\overrightarrow{e_1})=\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_1}=-\overrightarrow{e_1}$

$$g\left(f(\overrightarrow{e_1})\right)=g(-\overrightarrow{e_1})=-\overrightarrow{e_1}+2\left(\overrightarrow{e_1}\cdot\vec{b}\right)\vec{b}$$

$\overrightarrow{e_1}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{e_1}\cdot(\cos\theta\,\overrightarrow{e_1}+\sin\theta\,\overrightarrow{e_2})=\cos\theta\left|\overrightarrow{e_1}\right|^2+\sin\theta\,\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=\cos\theta$ なので,

$$g\left(f(\overrightarrow{e_1})\right)=-\overrightarrow{e_1}+2\cos\theta(\cos\theta\,\overrightarrow{e_1}+\sin\theta\,\overrightarrow{e_2})=(2\cos^2\theta-1)\overrightarrow{e_1}+2\sin\theta\cos\theta\,\overrightarrow{e_2}=\cos2\theta\,\overrightarrow{e_1}+\sin2\theta\,\overrightarrow{e_2}$$

■

✏注　解答欄を見れば，$g\left(f(\overrightarrow{e_2})\right)$ は計算せずとも，$g\left(f(\overrightarrow{e_2})\right)=-\sin2\theta\,\overrightarrow{e_1}+\cos2\theta\,\overrightarrow{e_2}$ であることが分かりますが，いちおう，きちんと導いてみましょう．
$f(\overrightarrow{e_2})=\overrightarrow{e_2}-2\left(\overrightarrow{e_2}\cdot\vec{a}\right)\vec{a}$
$\overrightarrow{e_1}=\vec{a}$ より，$\overrightarrow{e_2}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_1}=0$
よって，$f(\overrightarrow{e_2})=\overrightarrow{e_2}$

$$g\left(f(\overrightarrow{e_2})\right)=g(\overrightarrow{e_2})=\overrightarrow{e_2}-2\left(\overrightarrow{e_2}\cdot\vec{b}\right)\vec{b}$$

$\overrightarrow{e_2}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{e_2}\cdot(\cos\theta\,\overrightarrow{e_1}+\sin\theta\,\overrightarrow{e_2})=\cos\theta\,\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}+\sin\theta\left|\overrightarrow{e_2}\right|^2=\sin\theta$ なので,

$$g\left(f(\overrightarrow{e_2})\right)=\overrightarrow{e_2}-2\sin\theta(\cos\theta\,\overrightarrow{e_1}+\sin\theta\,\overrightarrow{e_2})=-2\sin\theta\cos\theta\,\overrightarrow{e_1}+(1-2\sin^2\theta)\overrightarrow{e_2}=-\sin2\theta\,\overrightarrow{e_1}+\cos2\theta\,\overrightarrow{e_2}$$

＜解答＞

ア	イ	ウ	エ	オ
$\vec{a}$	$\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_2}$	$\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_2}$	$\cos2\theta$	$\sin2\theta$

【4】　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

A さんは家から大学に行くのに n 回電車に乗る．雨が降っていたので，A さんは傘を 1 本持って家を出発した．A さんは，傘を持って電車に乗るたびに，確率 $\dfrac{1}{3n}$ で傘を車両に置き忘れるものとする．

(1) A さんが傘を忘れずに大学にたどり着ける確率 P_n は $\boxed{\text{ア}}$ である．$1 \leqq k \leqq n$ なる k に対して，k 番目の電車に傘を置き忘れる確率は $\boxed{\text{イ}}$ である．また，$1 \leqq i \leqq j \leqq n$ なる i と j に対して，j 番目の電車から降りたあと，今まで乗ったどれかの電車に傘を置き忘れたことに気づいたとき，i 番目の電車で傘を置き忘れた確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_n = \boxed{\text{エ}}$ である．

(3) $n = 2m$（偶数）とする．n 番目の電車から降りたあと，今まで乗ったどれかの電車に傘を置き忘れたことに気づいたとき，1 番目から m 番目までのどれかの電車に傘を置き忘れた確率を Q_m とすると，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} Q_m = \boxed{\text{オ}}$ である．

考え方　条件付き確率の問題です．極限値計算では e の定義を用いるので確認しておこう．

解

(1)　傘を車両に置き忘れない確率は $1-\dfrac{1}{3n}$.

傘を忘れずに大学にたどり着ける確率は，傘をすべての車両に置き忘れない確率であるので，

$$P_n = \left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$$

k 番目の電車に傘を置き忘れる確率は，1 番目から $k-1$ 番目の電車で傘を置き忘れずに k 番目の電車で置き忘れる確率なので，

$$\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3n} = \frac{1}{3n}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{k-1}$$

「1 番目から j 番目のいずれかの電車で傘を忘れる」事象を J，「i 番目の電車で傘を忘れる」事象を I とすると，求める確率は，条件付き確率 $P_J(I)$ である．

$$P(J) = 1-\left(1-\frac{1}{3n}\right)^j$$

$$P(J\cap I) = \left(1-\frac{1}{3n}\right)^{i-1} \times \frac{1}{3n}$$

$$\therefore\ P_J(I) = \frac{P(J\cap I)}{P(J)} = \frac{\dfrac{1}{3n}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^{i-1}}{1-\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^j}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{-3n}\right\}^{-\frac{1}{3}} = e^{-\frac{1}{3}}$$

(3) $\boxed{\text{エ}}$ において，$j=n=2m$ とすると，$\dfrac{\dfrac{1}{6m}\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{i-1}}{1-\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{2m}}$ であり，Q_m は

$$
\begin{aligned}
Q_m &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\dfrac{1}{6m}\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{i-1}}{1-\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{2m}} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{i-1}-\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{i}}{1-\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{2m}} \\
&= \frac{\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{0}-\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{m}}{1-\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{2m}} \\
&= \frac{1-\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{m}}{1-\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{2m}} \\
&= \frac{1-\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{m}}{\left\{1+\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{m}\right\}\left\{1-\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{m}\right\}} \\
&= \frac{1}{1+\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{m}}
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{6m}\right)^{m} = \lim_{m\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{6m}\right)^{-6m}\right\}^{-\frac{1}{6}} = e^{-\frac{1}{6}}
$$

$$
\therefore\ \lim_{m\to\infty} Q_m = \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{6}}}
$$

■

✎注　Q_m の $\sum$ 計算は，上の解答では「差分」を考えていますが，等比数列の和の公式を用いてもできます．

$$
Q_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{\dfrac{1}{6m}\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{i-1}}{1-\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{2m}} = \frac{\dfrac{1}{6m}}{1-\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{2m}} \cdot \frac{1\cdot\left\{1-\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{m}\right\}}{1-\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)} = \frac{1-\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{m}}{1-\left(1-\dfrac{1}{6m}\right)^{2m}}
$$

＜解答＞

ア	イ	ウ	エ	オ
$\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^{n}$	$\dfrac{1}{3n}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^{k-1}$	$\dfrac{\dfrac{1}{3n}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^{i-1}}{1-\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^{j}}$	$e^{-\frac{1}{3}}$	$\dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{6}}}$

【5】　正整数 n に対し，

$$p(n)=n^3+2n^2+n+2020^2$$

と定めたとき，以下を証明せよ．ただし，立方数とはある正整数 m を用いて m^3 と表される数のことである．

（1）$p(2019)$ は立方数である．
（2）$p(n)$ が立方数となる最大の正整数は 2019 である．

考え方　(2) が難しい．(1) で $n=2019$ のときに立方数であることを示した上で，(2) で「立方数になる最大の整数が 2019 であること」を示すのですから，「2020 以上では立方数にならないこと」を示せば良いわけです．おそらく「立方数になったと仮定して矛盾を導く」と考えた人も多いと思いますが，うまくいきません．実は，全く同じ考え方で証明できる問題を「犬プリ」で解説してあります．「整数問題攻略のための 5 つの原則」のいうプリントを見てください．その一番最初の問題とほぼ同じ．ある意味，的中でした！

解

(1)

$$\begin{aligned}p(2019)&=2019^3+2\cdot2019^2+2019+2020^2\\&=2019^3+2\cdot2019^2+2019+(2019+1)^2\\&=2019^3+2\cdot2019^2+2019+2019^2+2\cdot2019+1\\&=2019^3+3\cdot2019^2+3\cdot2019+1\\&=(2019+1)^3\\&=2020^3\end{aligned}$$

よって，$p(2019)$ は立方数である．

(2)

$$\begin{aligned}p(n)&=n^3+2n^2+n+2020^2\\&=n^3+3n^2+3n+1-n^2-2n-1+2020^2\\&=(n+1)^3+2020^2-(n+1)^2\end{aligned}$$

(i) $n=2019$ のとき，

$2020^2-(n+1)^2=0$ なので，$p(n)=(n+1)^3$ となり，$p(n)$ は立方数である．

(ii) $n>2019$ のとき，

$2020^2-(n+1)^2<0$ なので，$p(n)<(n+1)^3$

また，$p(n)-n^3=2n^2+n+2020^2>0$ なので，$p(n)>n^3$

$$\therefore\ n^3<p(n)<(n+1)^3$$

このことはつまり，$p(n)$ が連続する 2 つの立方数の間に存在することを意味しているので，$p(n)$ が立方数になることはない．

(i)(ii) より，$p(n)$ が立方数となる最大の正整数は 2019 である．

■

注　(1) は，とりあえず代入して計算し，$p(2019)$ が立方数になることを示しましたが，次の (2)(i) では，もっとうまい方法で $p(2019)$ が立方数になることを示しています．(1) もこの方法を使えばよいのですが，なかなか気づかないと思うので，(1) はベタな方法でやりました．