

2021年2月6日実施 奈良県立医科大学 推薦入試問題(数学)

【1】 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ.

a と t を正の実数とする. 関数 $y = \sqrt{ax}$ で定まる曲線 C 上の点 $P(t, \sqrt{at})$ における接線と x 軸との交点を Q , 点 $(a, 0)$ を R とおき, C と線分 PQ および x 軸で囲まれた図形の面積を S_1 , C と線分 PR および x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする.

(1) 点 P における C の接線の方程式は $y = \boxed{\text{ア}}$ $x + \boxed{\text{イ}}$ である.

(2) $S_1 = \boxed{\text{ウ}}$, $S_2 = \boxed{\text{エ}}$ である.

(3) a は正の定数とする. t が $t > 0$ の範囲を動くとする. $S_2 - S_1$ の最大値は $\boxed{\text{オ}}$ である.
 t の動く範囲を $0 < t \leq \boxed{\text{カ}}$ とすると, $|S_2 - S_1|$ の最大値を与える t は 2 つ存在する.

【2】 以下の空欄にあてはまる言葉を,

X : 必要条件でも十分条件でもない

Y : 必要条件であるが十分条件でない

Z : 十分条件であるが必要条件でない

W : 必要十分条件である

から選び, 記号 X, Y, Z, W で答えよ.

(1) 実数 x, a に対し, 方程式 $2^x = a$ を満たす正の x が存在することは, $a > 0$ であるための $\boxed{\text{ア}}$.

(2) 2 つの変数 x, y についてのデータの組 $(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, b)$ に対し, $b = 1$ であることは, x と y に対する相関係数が 0 であるための $\boxed{\text{イ}}$.

(3) $0 \leq x \leq 1$ で定義された連続な関数 $f(x)$ に対し, $\int_0^1 f(x) dx = 0$ であることは, $f(a)f(b) < 0$ となる a, b ($0 \leq a \leq b \leq 1$) が存在するための $\boxed{\text{オ}}$.

(4) 複素数 z に対し, z が純虚数であることは, z^3 が純虚数であるための $\boxed{\text{エ}}$.

(5) 平面上に三角形 ABC と $\vec{AP} = s\vec{AB} + t\vec{AC}$ を満たす点 P がある. s, t は実数である. $s + t = 1$ であることは, 点 P が辺 BC 上にあるための $\boxed{\text{オ}}$.

【3】 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ。

x, y, z に関する以下の整式を考える。

$$F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$F_2(x, y, z) = 2z^2 - x^2 - y^2$$

$$F_3(x, y, z) = x^2 - y^2$$

$$F_4(x, y, z) = xyz$$

- (1) 連立方程式 $F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = F_3(x, y, z) = 0$ の解は, xyz 空間の中で複数個の点を定める. それらの点を頂点とする凸多面体は である.
- (2) 連立方程式 $F_1(x, y, z) = F_3(x, y, z) = F_4(x, y, z) = 0$ の解は, xyz 空間の中で複数個の点を定める. それらの点を頂点とする凸多面体は である.

【4】 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ。

ここでは, 病気 A, B, C, D のいずれか一つに患っている人を患者と呼ぶ. 患者が病気 X に患っている確率を $P(X)$ とするとき, $P(A) > 0, P(B) > 0, P(C) = P(D) = 0.2$ が分かっている. 患者に症状 S が現れたとき, その原因は病気 A, B, C, D のいずれかであり, 症状 S が現れる確率を $P(S)$ とする. 患者が病気 A, B, C, D に患ったときに症状 S が現れる確率は, それぞれ $P_A(S) = 0.8, P_B(S) = 0.4, P_C(S) = 0.7, P_D(S) = 0.9$ である. 症状 S が現れているときに病気 X に患っている確率を $P_S(X)$ と表すと, $P_S(C)P(S) = \input{text}{ア}$, $P_S(D)P(S) = \input{text}{イ}$ である. $X = B, C, D$ に対して

$$P_S(X) < P_S(A)$$

が成り立つとき, すなわち症状 S に対して最も確からしい原因が病気 A であるとき, $P(A)$ のとり得る値の範囲は $< P(A) < \input{text}{エ}$ である.

【5】 素数 p は, 正整数 x, y を用いて $p = x^3 + y^3$ で表せるとする.

- (1) 整式 $u^3 + v^3$ を因数分解せよ.
- (2) $x + y = p$ を証明せよ.
- (3) $p = 2$ を証明せよ.