2021年　奈良県立医大　推薦入試問題（数学）解答

【1】　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

a と t を正の実数とする．関数 $y=\sqrt{ax}$ で定まる曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{at})$ における接線と x 軸との交点を Q，点 $(a,\ 0)$ を R とおき，C と線分 PQ および x 軸で囲まれた図形の面積を S_1，C と線分 PR および x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする．

(1) 点 P における C の接線の方程式は $y=$ $\boxed{\text{ア}}$ $x+$ $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) $S_1=$ $\boxed{\text{ウ}}$ ，$S_2=$ $\boxed{\text{エ}}$ である．

(3) a は正の定数とする．t が $t>0$ の範囲を動くとすると，S_2-S_1 の最大値は $\boxed{\text{オ}}$ である．t の動く範囲を $0<t\leqq$ $\boxed{\text{カ}}$ とすると，$|S_2-S_1|$ の最大値を与える t は 2 つ存在する．

考え方　数学 Ⅲ の基本的な融合問題です．計算ミスに気を付けて落ち着いて解答しよう．

(2) で S_2 を求める際，直接 S_2 を求めようとすると図が 2 通り考えられるので面倒なことになりますので注意しよう．

(3) は，絶対値のグラフをイメージしよう．おそらく 3 次関数の場合に類題を解いたころがあるはずです．

解　点 P における接線を l とする．

(1) $y=\sqrt{ax}$ より，$y'=\dfrac{a}{2\sqrt{ax}}$

よって，点 P における接線 l の方程式は

$$y-\sqrt{at}=\frac{a}{2\sqrt{at}}(x-t)$$

$$y=\frac{a}{2\sqrt{at}}x+\frac{\sqrt{at}}{2}$$

(2) 接線 l と x 軸との交点は，

$\dfrac{a}{2\sqrt{at}}x+\dfrac{\sqrt{at}}{2}=0$ より，$x=-t$

$$\therefore\ \mathrm{Q}(-t,\ 0)$$

$$\begin{aligned}
S_1&=\int_{-t}^{t}\left(\frac{a}{2\sqrt{at}}x+\frac{\sqrt{at}}{2}\right)dx-\int_0^t\sqrt{ax}\,dx\\
&=\int_0^t\sqrt{at}\,dx-\left[\frac{2}{3a}(ax)^{\frac{3}{2}}\right]_0^t\\
&=t\sqrt{at}-\frac{2}{3a}(at)^{\frac{3}{2}}\\
&=t\sqrt{at}-\frac{2t}{3}\sqrt{at}\\
&=\frac{t\sqrt{at}}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2&=\triangle\mathrm{PQR}-S_1\\
&=(a+t)\times\sqrt{at}\times\frac{1}{2}-\frac{t\sqrt{at}}{3}\\
&=\frac{(t+3a)\sqrt{at}}{6}
\end{aligned}$$

(3) (2) より，

$$S_2-S_1=\frac{(-t+3a)\sqrt{at}}{6}$$

$f(t)=\dfrac{(-t+3a)\sqrt{at}}{6}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
f'(t)&=\frac{1}{6}\left(-\sqrt{at}+(-t+3a)\frac{a}{2\sqrt{at}}\right)\\
&=\frac{-2at+a(-t+3a)}{12\sqrt{at}}\\
&=\frac{3a^2-3at}{12\sqrt{at}}\\
&=\frac{a(a-t)}{4\sqrt{at}}
\end{aligned}$$

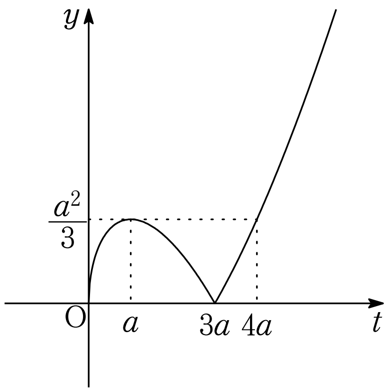
$f(t)$ の増減表は以下のようになる．

t	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		↗	極大	↘

$\displaystyle\lim_{t\to+0} f(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} f(t) = -\infty$

よって，$f(t)$ は $t = a$ で最大値 $f(a) = \dfrac{a^2}{3}$ をとる．

次に，，$y = \left|f(t)\right|$ のグラフを考えよう．このグラフは，$y = f(t)$ のグラフの t 軸よりも下の部分を上に折り上げたもので，$f(4a) = -\dfrac{a^2}{3}$ であることに注意すると以下のようになる．



よって，t の動く範囲を $0 < t \leqq 4a$ とすると，$\left|S_2 - S_1\right|$ の最大値を与える t は $t = a$，$4a$ の 2 つ存在する．

■

注　$t = 4a$ の見つけ方について．

厳密には，$f(t) = -\dfrac{a^2}{3}$ を解くことになります．つまり，t の方程式

$$\frac{(-t+3a)\sqrt{at}}{6} = -\frac{a^2}{3}$$

を解きます．$\sqrt{t} = s$ と置き換えて，s の 3 次方程式に直し，因数分解して $\cdots$ という手法になりますが，かなり面倒です．

では，どうやって見つけたのかというと ………カンです (笑)．

グラフが $t = 3a$ で折り上げてるわけですから，$t = a$ のときと同じ高さになるのは，$3a$ よりも大きいはず．じゃあ，とりあえず，$t = 4a$，$5a$，$6a$ あたりを代入してみるか，ってな感じです．で，うまい具合に，$t = 4a$ でバッチリ同じ高さになった．ラッキ〜．

＜解答＞

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
$\dfrac{a}{2\sqrt{at}}$	$\dfrac{\sqrt{at}}{2}$	$\dfrac{t\sqrt{at}}{3}$	$\dfrac{(t+3a)\sqrt{at}}{6}$	$\dfrac{a^2}{3}$	$4a$

【2】　以下の空欄にあてはまる言葉を，

X：必要条件でも十分条件でもない

Y：必要条件であるが十分条件でない

Z：十分条件であるが必要条件でない

W：必要十分条件である

から選び，記号 X，Y，Z，W で答えよ．

(1) 実数 x，a に対し，方程式 $2^x = a$ を満たす正の x が存在することは，$a > 0$ であるための $\boxed{\quad ア \quad}$.

(2) 2 つの変数 x，y についてのデータの組 $(-1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$，$(1,\ -1)$，$(1,\ b)$ に対し，$b = 1$ であることは，x と y に対する相関係数が 0 であるための $\boxed{\quad イ \quad}$.

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ で定義された連続な関数 $f(x)$ に対し，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx = 0$ であることは，$f(a)f(b) < 0$ となる a，b $(0 \leqq a \leqq b \leqq 1)$ が存在するための $\boxed{\quad ウ \quad}$.

(4) 複素数 z に対し，z が純虚数であることは，z^3 が純虚数であるための $\boxed{\quad エ \quad}$.

(5) 平面上に三角形 ABC と $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす点 P がある．s, t は実数である．$s + t = 1$ であることは，点 P が辺 BC 上にあるための $\boxed{\quad オ \quad}$.

考え方　いずれも共通テストレベルの基本問題です．正しければ証明し，正しくなければ反例を紹介します．

解

(1)

$$2^x = a \text{ を満たす正の } x \text{ が存在する} \ \overset{\bigcirc}{\underset{\times}{\rightleftarrows}}\ a > 0$$

$\therefore$ 十分条件

(証明)　$y = 2^x$ のグラフを考えると，$2^x = a$ を満たす正の x が存在するための a の必要十分条件は $a > 1$ である．したがって，「$a > 1 \Longrightarrow a > 0$」は真である．逆は偽．$a = \dfrac{1}{2}$ のとき，$a > 0$ であるが，$x = -1 < 0$ であるため．

■

(2)

$$x \text{ と } y \text{ に対する相関係数が } 0 \ \overset{\bigcirc}{\underset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}\ b = 1$$

$\therefore$ 必要十分条件

(証明)

相関係数 $= \dfrac{x \text{ と } y \text{ の共分散}}{(x \text{ の標準偏差})(y \text{ の標準偏差})}$ で求められる．したがって，

相関係数 $= 0 \iff x$ と y の共分散 $= 0$

x の平均 $\bar{x} = 0$，y の平均 $\bar{y} = \dfrac{b-1}{4}$，

x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
-1	-1	-1	$\dfrac{-3-b}{4}$	$\dfrac{3+b}{4}$
-1	1	-1	$\dfrac{5-b}{4}$	$\dfrac{-5+b}{4}$
1	-1	1	$\dfrac{-3-b}{4}$	$\dfrac{-3-b}{4}$
1	b	1	$\dfrac{3b+1}{4}$	$\dfrac{3b+1}{4}$

x と y の共分散 S_{xy} を求めると

$$s_{xy} = \frac{1}{4}\left(\frac{3+b}{4} + \frac{-5+b}{4} + \frac{-3-b}{4} + \frac{3b+1}{4}\right) = \frac{b-1}{4}$$

よって，

x と y の共分散 $= 0 \iff b = 1$

■

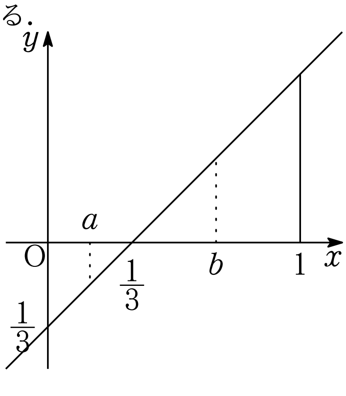
（3）

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \ \underset{\times}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}\ f(a)f(b) < 0 \text{ となる } a,\, b \text{ が存在する}$$

$\therefore$ 必要条件でも十分条件でもない

（証明）　定数関数 $x = 0$ を考えると，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ であるが，$f(a)f(b) < 0$ となる a，b は存在しない．

また，例えば，$y = x - \dfrac{1}{3}$ のグラフを考えると，$f(a)f(b) < 0$ となる a, b は存在するが，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \fallingdotseq 0$ である．



■

（4）

$$z \text{ が純虚数} \ \underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}\ z^3 \text{が純虚数}$$

$\therefore$ 十分条件

（証明）　z が純虚数のとき，$z = yi$（$y \fallingdotseq 0$）とおけば，$z^3 = -y^3 i$ となり，z^3 も純虚数である．
しかし，$z = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$ のとき，
$z^3 = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} = i$ となり，z は純虚数ではないが z^3 が純虚数になる．

■

(5)

$$s+t=1 \;\underset{\bigcirc}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}\; \text{点 } P \text{ が辺 } BC \text{ 上にある}$$

$\therefore$ 必要条件

(証明)　点 P が辺 BC 上にあるための条件は，$s+t=1$, $s>0$, $t>0$ であるから．

注　$s+t=1$ は，辺 BC 上ではなく，直線 BC 上に点 P が存在するための条件．

■

＜解答＞

ア	イ	ウ	エ	オ
Z	W	X	Z	Y

【3】　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

x，y，z に関する以下の整式を考える．

$$F_1(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2-1$$

$$F_2(x,\ y,\ z)=2z^2-x^2-y^2$$

$$F_3(x,\ y,\ z)=x^2-y^2$$

$$F_4(x,\ y,\ z)=xyz$$

（1）連立方程式 $F_1(x,\ y,\ z)=F_2(x,\ y,\ z)=F_3(x,\ y,\ z)=0$ の解は，xyz 空間の中で複数個の点を定める．それらの点を頂点とする凸多面体は $\boxed{\text{ア}}$ である．

（2）連立方程式 $F_1(x,\ y,\ z)=F_3(x,\ y,\ z)=F_4(x,\ y,\ z)=0$ の解は，xyz 空間の中で複数個の点を定める．それらの点を頂点とする凸多面体は $\boxed{\text{イ}}$ である．

考え方　図形的に考えることもできますが，素直に連立方程式を解いた方が手っ取り早いです．

解

（1）$F_1(x,\ y,\ z)=F_2(x,\ y,\ z)=F_3(x,\ y,\ z)=0$ より

$$x^2+y^2+z^2-1=2z^2-x^2-y^2=x^2-y^2=0$$

$x^2=X$，$y^2=Y$，$z^2=Z$ とすると，次のような連立方程式を解くことになる

$$\begin{cases} X+Y+Z-1=0 \\ 2Z-X-Y=0 \\ X-Y=0 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと，$X=Y=Z=\dfrac{1}{3}$ より

$$(x,\ y,\ z)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ \text{（複号任意）}$$

つまり，$(x,\ y,\ z)$ は合計 8 組の解になり，これらの 8 点で構成される多面体は立方体である．

（2）$F_1(x,\ y,\ z)=F_3(x,\ y,\ z)=F_4(x,\ y,\ z)=0$ より

$$x^2+y^2+z^2-1=x^2-y^2=xyz=0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0 & \cdots ① \\ x^2-y^2=0 & \cdots ② \\ xyz=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

③ より，$x=0$ または $y=0$ または $z=0$

（i）$x=0$ のとき

② より，$y=0$

① に $x=y=0$ を代入して，$z=\pm1$

（ii）$y=0$ のとき

② より，$x=0$

① に $x=y=0$ を代入して，$z=\pm1$

（i） $z=0$ のとき

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots ①' \\ x^2-y^2=0 & \cdots ② \end{cases}$$

よって，$x^2=y^2=\dfrac{1}{2}$ となり

$$(y,\ z)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad（複号任意）$$

よって，(i)(ii)(iii) より解の組は以下の 6 組

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ \pm1),\quad \left(0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad（複号任意）$$

これらの 6 点で構成される多面体は正八面体である．

■

✎**注**　記述答案ならば，(1)(2) で求めた点で構成される立体が，本当に「立方体」や「正八面体」になることを，辺の長さを計算したり図示したりして検証する必要がありますが，今回は省略しました．

＜解答＞

ア	イ
立方体	正八面体

【4】　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

ここでは，病気 A，B，C，D のいずれか一つにり患している人を患者と呼ぶ．患者が病気 X にり患している確率を $P(X)$ とするとき，$P(A)>0$，$P(B)>0$，$P(C)=P(D)=0.2$ が分かっている．患者に症状 S が現れたとき，その原因は病気 A，B，C，D のいずれかであり，症状 S が現れる確率を $P(S)$ とする．患者が病気 A，B，C，D にり患したときに症状 S が現れる確率は，それぞれ $P_A(S)=0.8$，$P_B(S)=0.4$，$P_C(S)=0.7$，$P_D(S)=0.9$ である．症状 S が現れているときに病気 X にり患している確率を $P_S(X)$ と表すと，$P_S(C)P(S)=\boxed{\text{ア}}$，$P_S(D)P(S)=\boxed{\text{イ}}$ である．$X=B, C, D$ に対して

$$P_S(X)<P_S(A)$$

が成り立つとき，すなわち症状 S に対して最も確からしい原因が病気 A であるとき，$P(A)$ のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ウ}}<P(A)<\boxed{\text{エ}}$ である．

考え方　医学部らしい問題といえばそれまでですが，やってることは大したことないです．
条件付確率の基本公式を駆使します．つまり，

$$P_X(Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}, \qquad P_Y(X)=\frac{P(Y\cap X)}{P(Y)}$$

なので

$$P_X(Y)P(X)=P_Y(X)P(Y)$$

つまり，文字を入れ替えても構わないのです．記述式答案の場合は，このことを明記したほうが良いと思いますが，今回は省略します．

解

$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ について

$$P_S(C)P(S)=P_C(S)P(C)=0.7\times 0.2=0.14 \cdots\cdots \boxed{\text{ア}}$$

$$P_S(D)P(S)=P_D(S)P(D)=0.9\times 0.2=0.18 \cdots\cdots \boxed{\text{イ}}$$

$P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1$，$P(C)=P(D)=0.2$ より

$$P(A)+P(B)=0.6 \quad \cdots\cdots①$$

$P_S(A)P(S)=P_A(S)P(A)=0.8P(A)$
$P_S(B)P(S)=P_B(S)P(B)=0.4P(B)$
$P_S(C)P(S)=P_C(S)P(C)=0.14$
$P_S(D)P(S)=P_D(S)P(D)=0.18$
$X=B, C, D$ に対して，$P_S(X)<P_S(A)$．すなわち，

$$P_S(B)<P_S(A), \quad P_S(C)<P_S(A), \quad P_S(D)<P_S(A)$$

$P(S)>0$ より，

$$P_S(B)P(S)<P_S(A)P(S), \quad P_S(C)P(S)<P_S(A)P(S), \quad P_S(D)P(S)<P_S(A)P(S)$$

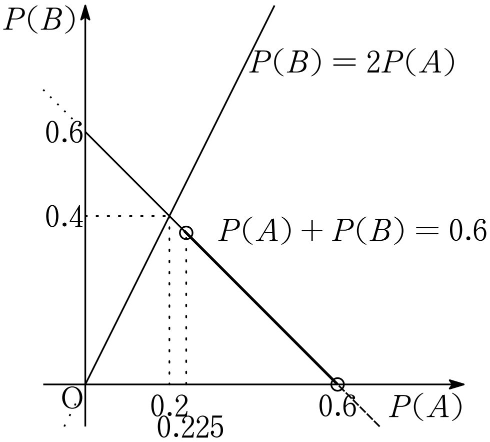
であるので,

$$0.4P(B) < 0.8P(A) \quad \therefore \quad P(B) < 2P(A) \cdots\cdots ②$$

$$0.14 < 0.8P(A) \quad \therefore \quad P(A) > 0.175 \cdots\cdots ③$$

$$0.18 < 0.8P(A) \quad \therefore \quad P(A) > 0.225 \cdots\cdots ④$$

$P(A) > 0$, $P(B) > 0$ に注意して ①, ②, ③, ④ を図示すると,



したがって,

$$0.225 < P(A) < 0.6$$

■

＜解答＞

ア	イ	ウ	エ
0.14	0.18	0.225	0.6

【5】 素数 p は，正整数 x，y を用いて $p=x^3+y^3$ で表せるとする．

（1）整式 u^3+v^3 を因数分解せよ．

（2）$x+y=p$ を証明せよ．

（3）$p=2$ を証明せよ．

考え方 基本的な整数問題．定番の手法で解決するので，この問題は絶対に落とせません．

解

（1） $u^3+v^3=(u+v)(u^2-uv+v^2)$

（2） $p=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

p は素数、$x+y \geqq 2$ なので，

$$(x+y,\ x^2-xy+y^2)=(p,\ 1)$$

よって，$x+y=p$

（3）（2）より，$x^2-xy+y^2=1$

この式を x についての 2 次方程式をみる．

$$x^2-yx+y^2-1=0 \quad \cdots\cdots ①$$

x は正整数であるので，少なくとも実数である必要がある．

したがって，この x についての 2 次方程式 ① の判別式を D とすると，$D \geqq 0$

$$\therefore\ (-y)^2-4(y^2-1) \geqq 0$$

$$3y^2-4 \leqq 0$$

したがって，y は正整数なので，$y=1$．

① より，$x^2-x=1$．x は正整数なので，$x=1$．

よって，$x=y=1$ なので，（2）より，$p=2$

■