

2022年2月5日実施 奈良県立医科大学 推薦入試問題(数学)

【1】 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ.

二等辺三角形 ABC を考える. 辺 AB と辺 AC の長さはともに l で, $\angle BAC = \theta$ とする.

(1) 三角形 ABC の面積は である.

(2) l を固定して θ を動かすとき, S が最大になるのは, $\theta =$ のときである.

(3) 二等辺三角形 ABC を辺 BC を軸として 1 回転させてできる立体の体積 V は である.

(4) l を固定して θ を動かすとき, V が最大になるのは, $\sin \theta =$ のときである.

【2】 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ.

n は 0 以上の整数とし, t は実数のパラメータで 0 ではないとする. t の整式 $a_n(t)$, $b_n(t)$ を

$$\int_0^1 x^n e^{-tx} dx = \frac{a_n(t) + b_n(t)e^{-t}}{t^{n+1}}$$

で定める. このとき, $a_0(t) =$, $b_0(t) =$ であり, $a_1(t) =$, $b_1(t) =$ である. 一般に, 0 以上の整数 n に対して $a_n(t) =$ であり, k を $0 \leq k \leq n$ を満たす整数とすると, 整式 $b_n(t)$ の t^k の係数は である.

【3】 以下の空欄を適切な数，式，または語句で埋めて文章を完成させよ。

関数 $f(x) = x + \sqrt{x^2 + a}$ を考える。ただし， a は正の定数とする。

(1) $f(x)$ は実数全体で定義された正の値をとる連続関数であり，

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{\text{ア}}, \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - f(x)) = \boxed{\text{イ}}$$

が成り立つ。 $f(x)$ は微分可能であり，導関数は

$$\frac{d}{dx} f(x) = \boxed{\text{ウ}}$$

となる。ここで， $\frac{d}{dx} f(x)$ はすべての x に対して $\boxed{\text{エ}}$ の値をとるので， $f(x)$ は単調

$\boxed{\text{オ}}$ 関数となる。したがって， $t = f(x)$ の逆関数が存在し， x は t の関数として

$$x = \boxed{\text{カ}}$$

と表される。

(2) $f(x) > 0$ であるので $\log f(x)$ が定義でき，微分可能である。その導関数を計算すると

$$\frac{d}{dx} \log f(x) = \frac{1}{\boxed{\text{キ}}}$$

となる。さらに不定積分は

$$\int \log f(x) dx = \boxed{\text{ク}} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

となる。

【4】 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ.

xyz 空間に 4 点 $A(1, 1, 0)$, $B(3, 0, 4)$, $C(4, 3, 1)$, $D(0, 0, 3)$ がある. 点 P は直線 AB 上を一定の速度で動き, 時刻 0 に点 A , 時刻 1 に点 B を通過する. また, 点 Q は直線 CD 上を一定の速度で動き, 時刻 0 に点 C , 時刻 1 に点 D を通過する. このとき, 時刻 t での点 P の座標は $\boxed{\text{ア}}$ であり, 点 Q の座標は $\boxed{\text{イ}}$ である. また, 時刻 t での点 P, Q 間の距離は $\boxed{\text{ウ}}$ であり, $t = \boxed{\text{エ}}$ のとき, 2 点 P, Q は最も近づき, その距離は $\boxed{\text{オ}}$ である.

【5】 2 以上の整数 n に対し, 集合 $S(n)$ を

$$S(n) = \left\{ \frac{x}{y} \mid x \text{ と } y \text{ は } n \text{ 以下の正の整数で, 最大公約数が } 1 \right\}$$

で定義する.

(1) $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$ の要素の個数を求めよ.

(2) $S(n)$ の要素の個数が奇数であることを示せ.

集合 $T(n)$ を $T(n) = \{|a - b| \mid a \in S(n), b \in S(n) \text{ かつ } a \neq b\}$ で定義する.

(3) $T(n)$ の要素の中で最小のものを求めよ