2022年　奈良県立医大　推薦入試問題（数学）解答

【1】　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

二等辺三角形 ABC を考える．辺 AB と辺 AC の長さはともに l で，$\angle \mathrm{BAC} = \theta$ とする．

（1）三角形 ABC の面積は $\boxed{\text{ア}}$ である．

（2）l を固定して θ を動かすとき，S が最大になるのは，$\theta = \boxed{\text{イ}}$ のときである．

（3）二等辺三角形 ABC を辺 BC を軸として 1 回転させてできる立体の体積 V は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

（4）l を固定して θ を動かすとき，V が最大になるのは，$\sin\theta = \boxed{\text{エ}}$ のときである．

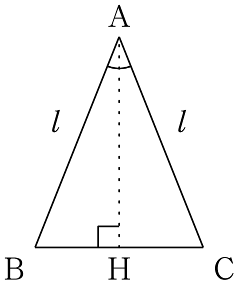
考え方　説明不要の基本問題です．手が止まることはないでしょう．さっさと片付けましょう．それにしても，(2) も (4) も，結局 l を固定するんだから，それなら最初から $l = 1$ とでもしておけば良いのにね．

解　（1）$S = \dfrac{1}{2}l^2\sin\theta$

（2）$S = \dfrac{1}{2}l^2\sin\theta$ において，l を固定するから，S が最大になるのは $\sin\theta$ が最大のときである．

$0 < \theta < \pi$ なので，$0 < \sin\theta \leqq 1$ だから，$\sin\theta = 1$ のとき，すなわち，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大となる．

（3）A から辺 BC におろした垂線の足を H とすると，求める立体の体積は，底面の半径が AH，高さが BH の円錐の体積 2 つ分である．



$\mathrm{AH} = l\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\mathrm{BH} = l\sin\dfrac{\theta}{2}$ なので，求める立体の体積 V は

$$V = \pi\left(l\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 \times l\sin\frac{\theta}{2} \times \frac{1}{3} \times 2$$
$$= \frac{2\pi}{3}l^3\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

（4）$V = \dfrac{2\pi}{3}l^3\cos^2\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}$ において，l を固定するから，V が最大になるのは $\cos^2\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}$ が最大のときである．

$\cos^2\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2} = \left(1 - \sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)\sin\dfrac{\theta}{2}$

ここで，$\sin\dfrac{\theta}{2} = t$ とおくと，$0 < \theta < \pi$ より，$0 < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ なので，$0 < t < 1$．

したがって，t の関数

$$f(t) = (1 - t^2)t \quad (0 < t < 1)$$

の最大値を求めればよい．

$f'(t) = 1 - 3t^2$ より，$0 < t < 1$ における増減は以下の通り．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

つまり，$t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，すなわち，$\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときに最大となる．

$0 < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ なので，

$\cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\dfrac{\theta}{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} = 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

■

<解答>

ア	イ	ウ	エ
$\frac{1}{2}l^2\sin\theta$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}l^3\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【2】　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

n は 0 以上の整数とし，t は実数のパラメータで 0 ではないとする．t の整式 $a_n(t)$，$b_n(t)$ を

$$\int_0^1 x^n e^{-tx}\,dx = \frac{a_n(t)+b_n(t)e^{-t}}{t^{n+1}}$$

で定める．このとき，$a_0(t)=$ $\boxed{\text{ア}}$，$b_0(t)=$ $\boxed{\text{イ}}$ であり，$a_1(t)=$ $\boxed{\text{ウ}}$，$b_1(t)=$ $\boxed{\text{エ}}$ である．一般に，0 以上の整数 n に対して $a_n(t)=$ $\boxed{\text{オ}}$ であり，k を $0 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とすると，整式 $b_n(t)$ の t^k の係数は $\boxed{\text{カ}}$ である．

考え方　いわゆる，部分積分の公式を利用して漸化式を作る問題です．頻出問題なので，どこかしらで解いたことがあると思います．計算ミスに注意して，確実に解いてほしい問題です．

なお，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ については，予想して結果のみを解答しました．本来は数学的帰納法などで証明する必要がありますが，問題自体が穴埋めですから，別に構わないでしょう．

解　$\displaystyle\int_0^1 x^n e^{-tx}\,dx = \frac{a_n(t)+b_n(t)e^{-t}}{t^{n+1}}$ において，

$n=0$ のとき

$$\int_0^1 e^{-tx}\,dx = \left[-\frac{1}{t}e^{-tx}\right]_0^1 = -\frac{1}{t}(e^{-t}-1) = \frac{1-e^{-t}}{t}$$

$$\therefore\ a_0(t)=1,\quad b_0(t)=-1$$

$n=1$ のとき，

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^{-tx}\,dx &= \int_0^1 x\left(-\frac{1}{t}e^{-tx}\right)'\,dx \\
&= \left[-\frac{x}{t}e^{-tx}\right]_0^1 - \int_0^1\left(-\frac{1}{t}e^{-tx}\right)dx \\
&= -\frac{1}{t}e^{-t} + \frac{1}{t}\int_0^1 e^{-tx}\,dx \\
&= -\frac{1}{t}e^{-t} + \frac{1}{t}\cdot\frac{1-e^{-t}}{t} \qquad (n=0\ \text{の場合の結果を利用した}) \\
&= \frac{1+(-t-1)e^{-t}}{t^2}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ a_1(t)=1,\quad b_1(t)=-t-1$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{n+1}e^{-tx}\,dx &= \int_0^1 x^{n+1}\left(-\frac{1}{t}e^{-tx}\right)'\,dx \\
&= \left[-\frac{x^{n+1}}{t}e^{-tx}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n\left(-\frac{1}{t}e^{-tx}\right)dx \\
&= -\frac{1}{t}e^{-t} + \frac{n+1}{t}\int_0^1 x^n e^{-tx}\,dx
\end{aligned}$$

$$\frac{a_{n+1}(t)+b_{n+1}(t)e^{-t}}{t^{n+2}} = -\frac{1}{t}e^{-t} + \frac{n+1}{t}\cdot\frac{a_n(t)+b_n(t)e^{-t}}{t^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}(t)+b_{n+1}(t)e^{-t}}{t^{n+2}} = \frac{(n+1)a_n(t)+\{(n+1)b_n(t)-t^{n+1}\}e^{-t}}{t^{n+2}}$$

$$\therefore \quad a_{n+1}(t) = (n+1)a_n(t), \qquad b_{n+1}(t) = (n+1)b_n(t) - t^{n+1}$$

$a_0(t) = 1$
$a_1(t) = 1a_0(t) = 1$
$a_2(t) = 2a_1(t) = 2 \cdot 1$
$a_3(t) = 3a_2(t) = 3 \cdot 2 \cdot 1$
$a_4(t) = 4a_3(t) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$a_5(t) = 5a_4(t) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
……
以下同様にして

$$a_n(t) = n!$$

（$0! = 1$ なので，$n = 0$ の場合も正しい）

$b_0(t) = -1$
$b_1(t) = 1b_0(t) - t = -t - 1$
$b_2(t) = 2b_1(t) - t^2 = -t^2 - 2t - 2$
$b_3(t) = 3b_2(t) - t^3 = -t^3 - 3t^2 - 6t - 6$
$b_4(t) = 4b_3(t) - t^4 = -t^4 - 4t^3 - 12t^2 - 24t - 24$
$b_5(t) = 5b_4(t) - t^5 = -t^5 - 5t^4 - 20t^3 - 60t^2 - 120t - 120$
$b_6(t) = 6b_5(t) - t^6 = -t^6 - 6t^5 - 30t^4 - 120t^3 - 360t^2 - 720t - 720$
……
以下同様にして，整式 $b_n(t)$ の t^k の係数を考えると，
$k = 0, 1$ のとき，$-n!$
$k = 2$ のとき，$-\dfrac{n!}{2}$
$k = 3$ のとき，$-\dfrac{n!}{2 \times 3}$
$k = 4$ のとき，$-\dfrac{n!}{2 \times 3 \times 4}$
$k = 5$ のとき，$-\dfrac{n!}{2 \times 3 \times 4 \times 5}$
……
以下同様にして

$$\therefore \quad -\frac{n!}{k!}$$

（$0! = 1$ なので，$n = 0$ の場合も正しい）

■

＜解答＞

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
1	-1	1	$-t-1$	$n!$	$-\dfrac{n!}{k!}$

【3】　以下の空欄を適切な数，式，または語句で埋めて文章を完成させよ．

関数 $f(x)=x+\sqrt{x^2+a}$ を考える．ただし，a は正の定数とする．

(1) $f(x)$ は実数全体で定義された正の値をとる連続関数であり，

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\boxed{\text{ア}},\ \lim_{x\to\infty}(2x-f(x))=\boxed{\text{イ}}$$

が成り立つ．$f(x)$ は微分可能であり，導関数は

$$\frac{d}{dx}f(x)=\boxed{\text{ウ}}$$

となる．ここで，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ はすべての x に対して $\boxed{\text{エ}}$ の値をとるので，$f(x)$ は単調 $\boxed{\text{オ}}$ 関数となる．したがって，$t=f(x)$ の逆関数が存在し，x は t の関数として

$$x=\boxed{\text{カ}}$$

と表される．

(2) $f(x)>0$ であるので $\log f(x)$ が定義でき，微分可能である．その導関数を計算すると

$$\frac{d}{dx}\log f(x)=\frac{1}{\boxed{\text{キ}}}$$

となる．さらに不定積分は

$$\int \log f(x)\,dx=\boxed{\text{ク}}+C\quad (C \text{ は積分定数})$$

となる．

考え方　毎年，最難度の長文問題が出題されているので，「今年もか！」と一瞬たじろぎますが，本当に一瞬でした．教科書レベルの基本問題です．

解

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ について

$x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき，$t\longrightarrow\infty$ なので，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x)&=\lim_{t\to\infty}\left(-t+\sqrt{t^2+a}\right)\\&=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2+a}-t\right)\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\sqrt{t^2+a}-t\right)\left(\sqrt{t^2+a}+t\right)}{\sqrt{t^2+a}+t}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{a}{\sqrt{t^2+a}+t}\\&=0\end{aligned}$$

また，

$$\lim_{x\to\infty}(2x-f(x))=\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+a}\right)=0$$

(∵　上記の計算と全く同じなので)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x)&=1+\frac{1}{2}(x^2+a)^{-\frac{1}{2}}(x^2+a)'\\&=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\end{aligned}$$

$x\geqq0$ のとき，$\dfrac{d}{dx}f(x)>0$

$x<0$ のとき，$x=-s$ とおくと，$s>0$ であり

$$\frac{d}{dx}f(x)=1-\frac{s}{\sqrt{s^2+a}}=1-\sqrt{\frac{s^2}{s^2+a}}$$

$a>0$ なので，$0<\dfrac{s^2}{s^2+a}<1$．

つまり，$\dfrac{d}{dx}f(x)>0$.

したがって，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ はすべての x に対して正の値をとる．

次に，$t=f(x)$ より

$$t=x+\sqrt{x^2+a}$$

$$t-x=\sqrt{x^2+a}$$

$$(t-x)^2=x^2+a$$

$$t^2-2tx=a$$

$$x=\frac{t^2-a}{2t}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log f(x)&=\frac{f'(x)}{f(x)}\\&=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}\\&=\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)}\\&=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\log f(x)\,dx&=\int x'\log f(x)\,dx\\&=x\log f(x)-\int x\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx\\&=x\log f(x)-\int\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\,dx\end{aligned}$$

$x^2=s$ とおくと，$2xdx=ds$ より，

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}dx=\int\frac{1}{2\sqrt{s+a}}ds=\sqrt{s+a}=\sqrt{x^2+a}$$

$$\int\log f(x)\,dx=x\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)-\sqrt{x^2+a}$$

■

＜解答＞

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
0	0	$1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}$	正	増加	$\dfrac{t^2-a}{2t}$

キ	ク
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$x\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)-\sqrt{x^2+a}$

✎注　ザックリ考えると，$x\longrightarrow\infty$ のとき，$\sqrt{x^2+a}\fallingdotseq x$ と考えられるので，

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+a}\fallingdotseq x+x=2x$$

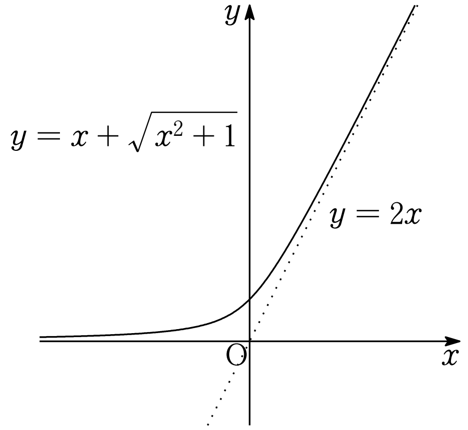
つまり，$x\longrightarrow\infty$ のとき，$f(x)$ は $2x$ に近づくことがわかります．このことはつまり，$y=f(x)$ の $x\longrightarrow\infty$ における漸近線が $y=2x$ であることを意味しており，

$$\lim_{x\to\infty}(2x-f(x))=0$$

であることは明らかです．

✎注　参考までに，$a=1$ の場合のグラフは右図の通り．

このグラフをみても分かるように，$x\longrightarrow-\infty$ のとき，$y\longrightarrow 0$ であり，$x\longrightarrow\infty$ における漸近線が $y=2x$ であることが分かります．



【4】　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

xyz 空間に 4 点 A(1，1，0)，B(3，0，4)，C(4，3，1)，D(0，0，3) がある．点 P は直線 AB 上を一定の速度で動き，時刻 0 に点 A，時刻 1 に点 B を通過する．また，点 Q は直線 CD 上を一定の速度で動き，時刻 0 に点 C，時刻 1 に点 D を通過する．このとき，時刻 t での点 P の座標は $\boxed{\text{ア}}$ であり，点 Q の座標は $\boxed{\text{イ}}$ である．また，時刻 t での点 P，Q 間の距離は $\boxed{\text{ウ}}$ であり，$t=\boxed{\text{エ}}$ のとき，2 点 P，Q は最も近づき，その距離は $\boxed{\text{オ}}$ である．

考え方　時刻 t における点の動きをパラメータ t を使って空間の直線のベクトル方程式を立てます．

解

点 P は，直線 AB 上を一定の速度で動き，時刻 0 に点 A，時刻 1 に点 B を通過するので，時刻 t における点 P の座標は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2t\\1-t\\4t\end{pmatrix}$$

と表すことができる．同様に，点 Q は

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-4\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-4t\\3-3t\\1+2t\end{pmatrix}$$

と表せる．

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}(4-4t)-(1+2t)\\(3-3t)-(1-t)\\(1+2t)-4t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-6t\\2-2t\\1-2t\end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=\sqrt{(3-6t)^2+(2-2t)^2+(1-2t)^2}=\sqrt{44t^2-48t+14}=\sqrt{44\left(t-\frac{6}{11}\right)^2+\frac{10}{11}}$$

したがって，PQ の長さが最小になるのは，$t=\dfrac{6}{11}$ のときで，そのときの最小値は $\sqrt{\dfrac{10}{11}}$

■

<解答>

ア	イ	ウ	エ	オ
$(1+2t,\ 1-t,\ 4t)$	$(4-4t,\ 3-3t,\ 1+2t)$	$\sqrt{44t^2-48t+14}$	$\dfrac{6}{11}$	$\sqrt{\dfrac{10}{11}}$

【5】　2 以上の整数 n に対し，集合 $S(n)$ を

$$S(n)=\left\{\frac{x}{y}\ \middle|\ x \text{ と } y \text{ は } n \text{ 以下の正の整数で，最大公約数が } 1\right\}$$

で定義する．

(1) $S(2)$，$S(3)$，$S(4)$ の要素の個数を求めよ．
(2) $S(n)$ の要素の個数が奇数であることを示せ．

集合 $T(n)$ を $T(n)=\left\{|a-b|\ \middle|\ a\in S(n),\ b\in S(n) \text{ かつ } a \neq b\right\}$ で定義する．

(3) $T(n)$ の要素の中で最小のものを求めよ．

$\boxed{\text{考え方}}$ このような初見の抽象的な問題は，とにかく具体例で考えることがポイントです．

解

(1)

$S(2)$ とは，分母分子が 2 以下の正の整数である既約分数の集合なので

$$S(2)=\left\{\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2}\right\}$$

よって，$S(2)$ の要素の個数は 3 個．

$S(3)$ とは，分母分子が 3 以下の正の整数である既約分数の集合なので

$$S(3)=\left\{\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}$$

よって，$S(3)$ の要素の個数は 7 個．

$S(4)$ とは，分母分子が 4 以下の正の整数である既約分数の集合なので

$$S(4)=\left\{\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{1},\frac{4}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right\}$$

よって，$S(4)$ の要素の個数は 11 個．

(2) $S(n)$ の要素に含まれる分数の中で，分母と分子が等しい分数は $\dfrac{1}{1}$ のみである．

また，$p \neq q$ のとき，$\dfrac{q}{p}$ が $S(n)$ の要素ならば，$\dfrac{p}{q}$ も要素であるので，$S(n)$ の要素で $\dfrac{1}{1}$ 以外の要素は，2 個ずつペアにすることができる．つまり偶数個である．したがって，偶数個の要素に $\dfrac{1}{1}$ を 1 個加えることになるので，$S(n)$ の要素の個数は奇数個であることが分かる．

(3) $\dfrac{q}{p}$ と $\dfrac{s}{r}$ を $S(n)$ の異なる要素とする（ただし，$\dfrac{q}{p}>\dfrac{s}{r}$ とする）．

(i) $p \neq r$ のとき

$$\frac{q}{p}-\frac{s}{r}=\frac{qr-ps}{pr}$$

$\dfrac{qr-ps}{pr}$ を小さくするには，分子 $qr-ps$ をなるべく小さく，分母 pr をなるべく大きくすれば良い．

p，q，r，s は n 以下の正の整数なので，

$$qr-ps=1,\qquad pr=n(n-1)\quad\cdots(※)$$

を満たす，p，q，r，s が存在すれば，それが最小値となる．

実際，

$$p=n-1,\qquad q=1,\qquad r=n,\qquad s=1$$

とすると，これらは (※) を満たしており，

$$\frac{q}{p}=\frac{1}{n-1},\qquad \frac{s}{r}=\frac{1}{n}$$

は，確かに $S(n)$ の要素である．

よって，$p \neq r$ のときの，$T(n)$ の要素の最小値は

$$\frac{1}{n(n-1)}$$

である．

(ii) $p=r$ のとき

$$\frac{q}{p}-\frac{s}{p}=\frac{q-s}{p}$$

$\dfrac{q-s}{p}$ を小さくするには，分子 $q-s$ をなるべく小さく，分母 p をなるべく大きくすれば良い．

p，q，s は n 以下の正の整数なので，$\dfrac{q-s}{p}$ の最小値は $\dfrac{1}{n}$ 以上である．

$n \geqq 2$ より,

$$\frac{1}{n(n-1)} < \frac{1}{n}$$

なので, $T(n)$ の要素の中で最小のものは

$$\frac{1}{n(n-1)}$$

である.

■

注　(3)(ii) の下線部について.「$\dfrac{q-s}{p}$ の最小値が $\dfrac{1}{n}$ になるような p, q, s が必ず存在するとは限らないが, 最小値が $\dfrac{1}{n}$ を下回ることはない」ことを意味しています. よって, (ii) の場合の「最小値の最小値」である $\dfrac{1}{n}$ よりも, $\dfrac{1}{n(n-1)}$ の方がより小さいので, $T(n)$ の要素の中で最小のものが, $\dfrac{1}{n(n-1)}$ であると結論できます.