2023年2月4日実施　奈良県立医科大学　推薦入試問題（数学）

【1】　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

次の 2 つの放物線を考える．

$$y = x^2 + ax + \frac{1}{2}$$

$$y = -x^2 + bx$$

ただし，$a > b$ とする．この 2 つの放物線が 1 点で接するとき，a と b の間には $a =$ $\boxed{\text{ア}}$ という関係が成り立つ．さらに，この接点の x 座標は $x =$ $\boxed{\text{イ}}$ である．もし接点が放物線の極値をとる位置にあるならば，$b =$ $\boxed{\text{ウ}}$ である．

【2】　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

正整数 n に対し，$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \dfrac{1}{n - |k-l|}$ とおく．

(1) $S(2) =$ $\boxed{\text{ア}}$，$S(3) =$ $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) a を $0 \leqq a \leqq n-1$ なる整数とする．整数 k，l を $1 \leqq k \leqq n$ かつ $1 \leqq l \leqq n$ かつ $k - l = a$ という条件のもとで動かしたときの $\dfrac{1}{n-|k-l|}$ の総和は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(3) $S(n) =$ $\boxed{\text{エ}}$ である．

【3】 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

xyz 空間の原点を O とする．空間内の 2 点 P(0, 1, 1)，Q(1, 0, -1) を通る直線を l とする．

(1) 点 R(x, y, z) が直線 l 上を動くとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と表す．このとき，x, y, z は t の 1 次式として $x=$ $\boxed{\text{ア}}$ ，$y=$ $\boxed{\text{イ}}$ ，$z=$ $\boxed{\text{ウ}}$ と表せる．

l を z 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面を S とする．

(2) 曲面 S と平面 $z=$ $\boxed{\text{ウ}}$ との交わりは円であり，その半径は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(3) 曲面 S の $z \geqq 0$ の部分と平面 $z=0$ で囲まれた部分を内側とする容器を考える．初め空であったこの容器に単位時間あたり V の割合で水を注入する．高さ h まで容器に水が入ったとすると，それに要した時間は V と h を用いて $\boxed{\text{オ}}$ と表される．

【4】 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

項数 200 の等差数列 a_1，…，a_{200} を考える．$a_3=14$，$a_8=29$ である．

(1) この数列の第 5 項は $a_5=$ $\boxed{\text{ア}}$ ，末項は $a_{200}=$ $\boxed{\text{イ}}$ であり，すべての項を足した値は $a_1+\cdots+a_{200}=$ $\boxed{\text{ウ}}$ ．

(2) k が 10 の倍数であるような a_k をすべて足した値は $a_{10}+a_{20}+\cdots+a_{200}=$ $\boxed{\text{エ}}$ ．
また，10 の倍数でも 15 の倍数でもないような k について，a_k をすべて足した値は
$a_1+\cdots+a_9+a_{11}+\cdots+a_{14}+a_{16}+\cdots+a_{199}=$ $\boxed{\text{オ}}$ ．

【5】 以下の問に答えよ．

(1) x の整式 x^4+x^2+1 を 2 つの 2 次式の積に因数分解せよ．

(2) 任意の正整数 n に対して，不等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+k^2+1}<\frac{1}{2}$ が成り立つことを証明せよ．