2024年2月3日実施　奈良県立医科大学　推薦入試問題（数学）

【1】　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

関数 $y=-x^2+9$ により定まる放物線 C を考える．正の実数 t に対し，$x=t$ における C の接線と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ P，Q とする．このとき，P と Q の座標はそれぞれは $\left(\boxed{\text{ア}},\,0\right)$ と $\left(0,\,\boxed{\text{イ}}\right)$ である．また，線分 PQ の長さ l は t を用いて

$$l=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\left(\left(\boxed{\text{ウ}}\,t^2+1\right)\left(t^2+\boxed{\text{エ}}\right)\right)^2}{t^2}}$$

と表せ，l は $t=\boxed{\text{オ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる．

【2】　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

a，b を正の実数とする．xy 平面上の点 $(x,\,y)$ を点 $(X,\,Y)=\left(\dfrac{ax^2}{2}-\dfrac{2y^2}{a},\,axy\right)$ に移動させる操作を T とする．次に

$$x^2+b^2y^2=b^2 \quad \cdots\,(\mathrm{A})$$

で定まる楕円を E とし，E 上のどの点も操作 T によって再び E 上に移るとする．

(1) E 上の点 $(x,\,y)$ に対し $(X,\,Y)$ は E 上の点だから，等式

$$x^4+4\left(b^2-\frac{2}{a^2}\right)x^2y^2+\boxed{\text{ア}}\,y^4-\boxed{\text{イ}}=0 \quad \cdots\,(\mathrm{B})$$

が成り立つ．(A) より $x^2=b^2(1-y^2)$ なので，これを (B) の左辺に代入して得られる式は y の整式として 0 でなければならない．したがって $b=\boxed{\text{ウ}}$ である．

(2) 操作 T を施しても動かない E 上の点は点 $\boxed{\text{エ}}$ だけである．

(3) 実数 θ に対し，E 上の点 $\left(\boxed{\text{ウ}}\cos\theta,\,\sin\theta\right)$ は操作 T により点

$$\left(\boxed{\text{ウ}}\cos\left(\boxed{\text{オ}}\right),\,\sin\left(\boxed{\text{オ}}\right)\right)$$

に移る．E 上の点のうち，操作 T を 2 回続けたときにもとの位置に戻るものは，点 $\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$（順不同）と (2) の点 $\boxed{\text{エ}}$ の 3 つだけである．

【3】　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

(1) 定積分

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

を考える．このとき $I_0 = \boxed{\text{ア}}$ である．また，$n \geqq 1$ に対し部分積分により定積分を計算すると，I_{n-1} から I_n を求めるための漸化式 $I_n = \boxed{\text{イ}}\ I_{n-1}$ が得られる．

(2) 定積分

$$J_n = \int_0^1 x^n \sqrt{3-2x-x^2}\, dx \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

を考え，$n \geqq 1$ に対し J_{n-1}，J_n，J_{n+1} の間の関係を求める．$2J_n + 2J_{n+1}$ を部分積分により計算すると，漸化式 $J_{n+1} = \boxed{\text{ウ}}\ J_n + \boxed{\text{エ}}\ J_{n-1}$ が得られる．

【4】　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

a は整数の定数とする．x に関する 4 次方程式

$$5x^4 - 6x^3 + ax^2 + x = 0$$

を考える．この方程式が

- 整数の解 α
- 整数でない正の有理数の解 β
- 無理数の解 γ_1，γ_2（順不同）

を持つとき，$a = \boxed{\text{ア}}$ であり，4 つの解は $\alpha = \boxed{\text{イ}}$，$\beta = \boxed{\text{ウ}}$，$\gamma_1 = \boxed{\text{エ}}$，$\gamma_2 = \boxed{\text{オ}}$ である．

【5】　$x > 0$ において関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ を考える．$y = f(x)$ の増減表を参考にして以下の問に答えよ．ただし，解答の過程も解答欄に記せ．

(1) 正の実数 a，b（$a < b$）が $a^b = b^a$ を満たすならば $a < e < b$ が成り立つことを証明せよ．ただし，e は自然対数の底を表す．

(2) $\alpha^\beta = \beta^\alpha$ を満たす正整数 α，β（$\alpha < \beta$）をすべて求めよ．