2024年　奈良県立医大　推薦入試問題（数学）解答

【1】　以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させせよ．

関数 $y=-x^2+9$ により定まる放物線 C を考える．正の実数 t に対し，$x=t$ における C の接線と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ P，Q とする．このとき，P と Q の座標はそれぞれは $\left(\boxed{\text{ア}},\ 0\right)$ と $\left(0,\ \boxed{\text{イ}}\right)$ である．また，線分 PQ の長さ l は t を用いて

$$l=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\left(\boxed{\text{ウ}}\,t^2+1\right)\left(t^2+\boxed{\text{エ}}\right)^2}{t^2}}$$

と表せ，l は $t=\boxed{\text{オ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる．

考え方　標準的な問題で，これは落とせません．微分する際には，$t^2=s$ と置き換えして計算の負担を減らしましょう．

解　$x=t$ における放物線 C の接線の方程式は，

$$y-(-t^2+9)=-2t(x-t)$$

$$y=-2tx+t^2+9$$

したがって，P，Q はこの接線の x 切片，y 切片なので

$$\mathrm{P}\left(\frac{t^2+9}{2t},\ 0\right),\qquad \mathrm{Q}(0,\ t^2+9)$$

したがって，線分 PQ の長さ l は

$$l^2=\left(\frac{t^2+9}{2t}\right)^2+(t^2+9)^2=\frac{(4t^2+1)(t^2+9)^2}{4t^2}$$

$$l=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(4t^2+1)(t^2+9)^2}{t^2}}$$

ここで，$t^2=s$ （$s>0$）とおき

$$f(s)=\frac{(4s+1)(s+9)^2}{s}$$

とする．$s>0$ にける $g(s)$ の最小値を求める．

$$f(s)=\left(4+\frac{1}{s}\right)(s+9)^2$$

$$\begin{aligned}f'(s)&=-\frac{1}{s^2}(s+9)^2+\left(4+\frac{1}{s}\right)2(s+9)\\&=(s+9)\left(-\frac{1}{s}-\frac{9}{s^2}+8+\frac{2}{s}\right)\\&=(s+9)\left(8+\frac{1}{s}-\frac{9}{s^2}\right)\\&=\frac{(s+9)(8s^2+s-9)}{s^2}\\&=\frac{(s+9)(8s+9)(s-1)}{s^2}\end{aligned}$$

$s>0$ より，$f(s)$ の増減は以下の通り．

s	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(s)$		$-$	0	$+$
$f(s)$	$(+\infty)$	↘	極小	↗

$g(1)=500$ より，
$g(s)$ は $s=1$ のとき最小値 500.
したがって，l は，
$t=1$ のとき，最小値 $\frac{1}{2}\sqrt{500}=5\sqrt{5}$
である．

■

＜解答＞

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
$\frac{t^2+9}{2t}$	t^2+9	4	9	1	$5\sqrt{5}$

【2】 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

a, b を正の実数とする．xy 平面上の点 (x, y) を点 $(X, Y) = \left(\dfrac{ax^2}{2} - \dfrac{2y^2}{a}, axy\right)$ に移動させる操作を T とする．次に

$$x^2 + b^2y^2 = b^2 \quad \cdots (\mathrm{A})$$

で定まる楕円を E とし，E 上のどの点も操作 T によって再び E 上に移るとする．

(1) E 上の点 (x, y) に対し (X, Y) は E 上の点だから，等式

$$x^4 + 4\left(b^2 - \frac{2}{a^2}\right)x^2y^2 + \boxed{\text{ア}}\, y^4 - \boxed{\text{イ}} = 0 \quad \cdots (\mathrm{B})$$

が成り立つ．(A) より $x^2 = b^2(1 - y^2)$ なので，これを (B) の左辺に代入して得られる式は y の整式として 0 でなければならない．したがって $b = \boxed{\text{ウ}}$ である．

(2) 操作 T を施しても動かない E 上の点は点 $\boxed{\text{エ}}$ だけである．

(3) 実数 θ に対し，E 上の点 $\left(\boxed{\text{ウ}}\cos\theta, \sin\theta\right)$ は操作 T により点

$$\left(\boxed{\text{ウ}}\cos\left(\boxed{\text{オ}}\right), \sin\left(\boxed{\text{オ}}\right)\right)$$

に移る．E 上の点のうち，操作 T を 2 回続けたときにもとの位置に戻るものは，点 $\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}$ (順不同) と (2) の点 $\boxed{\text{エ}}$ の 3 つだけである．

考え方　奈県医推薦恒例の長文穴埋め問題です．いわゆる「変換による不動点」の問題ですが，そんなことを知らなくても機械的に計算するだけ大丈夫です．しかし，その計算が少しメンドウです．時間内に完答するのは難しいかもしれません．

解　「点 $(x,\ y)$ が楕円 E 上の点であること」を，「$(x,\ y) \in E$」と表すこととする．
問題の条件は

$$(x,\ y) \in E \quad \Longrightarrow \quad (X,\ Y) \in E$$

である．

(1) $(X,\ Y) \in E$ なので，$X^2 + b^2Y^2 = b^2 \quad \cdots$①

$X = \dfrac{ax^2}{2} - \dfrac{2y^2}{a}$，$Y = axy$ を代入すると

$$\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{2y^2}{a}\right)^2 + b^2(axy)^2 = b^2$$

$$\frac{a^2}{4}x^4 - 2x^2y^2 + \frac{4}{a^2}y^4 + a^2b^2x^2y^2 - b^2 = 0$$

$$x^4 - \frac{8}{a^2}x^2y^2 + \frac{16}{a^4}y^4 + 4b^2x^2y^2 - \frac{4b^2}{a^2} = 0$$

$$x^4 + 4\left(b^2 - \frac{2}{a^2}\right)x^2y^2 + \frac{16}{a^4}y^4 - \frac{4b^2}{a^2} = 0 \quad \cdots②$$

$(x,\ y) \in E$ なので，$x^2 + b^2y^2 = b^2$．よって，$x^2 = b^2(1 - y^2)$ を ② に代入すると

$$b^4(1 - y^2)^2 + 4\left(b^2 - \frac{2}{a^2}\right)b^2(1 - y^2)y^2 + \frac{16}{a^4}y^4 - \frac{4b^2}{a^2} = 0$$

$$a^4b^4(1-y^2)^2+4(a^2b^2-2)a^2b^2(1-y^2)y^2+16y^4-4a^2b^2=0$$

y について整理して

$$-(3a^4b^4-8a^2b^2+16)y^4+(2a^4b^4-8a^2b^2)y^2+a^4b^4-4a^2b^2=0$$
$$-(3a^2b^2+4)(a^2b^2-4)y^4+2a^2b^2(a^2b^2-4)y^2+a^2b^2(a^2b^2-4)=0$$

任意の y で成立するので，y についての恒等式と考えて，

$$a^2b^2=4$$

$a>0$，$b>0$ より，$ab=2$.　　$\therefore\ b=\dfrac{2}{a}$

（2）操作 T で動かない E 上の点を $(x,\ y)$ とすると，

$$\begin{cases} x^2+b^2y^2=b^2 & \cdots③ \\ x=\dfrac{ax^2}{2}-\dfrac{2y^2}{a} & \cdots④ \\ y=axy & \cdots⑤ \end{cases}$$

⑤ より，$y(ax-1)=0$.　　$\therefore\ y=0$ または $x=\dfrac{1}{a}$

$y=0$ のとき，③ より，$x=\pm b$.

④ より，$x=\dfrac{ax^2}{2}\geqq 0$ なので，$x=b$

$x=\dfrac{1}{a}$ のとき，④ より，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2a}-\dfrac{2y^2}{a}$.

$\therefore\ \dfrac{1}{2a}=-\dfrac{2y^2}{a}$. この式は（左辺）$>0$，（右辺）$\leqq 0$ なので矛盾.

したがって，操作 T によって動かない E 上の点は，$(b,\ 0)$ のみ.

(1) より，$b=\dfrac{2}{a}$ なので，$\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$.

✎注（b，0）でもかまわないと思います.

（3）$x^2+b^2y^2=b^2$ より，$\dfrac{x^2}{b^2}+y^2=1$

よって，$(x,\ y)\in E$ を

$x=b\cos\theta=\dfrac{2}{a}\cos\theta$,　　$y=\sin\theta$

とおく．操作 T により，

$X=\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{2}{a}\cos\theta\right)^2-\dfrac{2}{a}\sin^2\theta=\dfrac{2}{a}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\dfrac{2}{a}\cos 2\theta$

$Y=a\cdot\dfrac{2}{a}\cos\theta\cdot\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$

したがって，操作 T により

$$\left(\frac{2}{a}\cos\theta,\ \sin\theta\right)\xmapsto{T}\left(\frac{2}{a}\cos 2\theta,\ \sin 2\theta\right)$$

のように写される．この操作を 2 回続けると，

$$\left(\frac{2}{a}\cos\theta,\ \sin\theta\right)\xmapsto{T}\left(\frac{2}{a}\cos 2\theta,\ \sin 2\theta\right)\xmapsto{T}\left(\frac{2}{a}\cos 4\theta,\ \sin 4\theta\right)$$

なので，操作 T を 2 回続けたときもとの位置に戻るのは

$$\cos 4\theta=\cos\theta,\qquad \sin 4\theta=\sin\theta$$

$$4\theta=\theta+2k\pi\ \ (k\text{ は整数})$$

つまり，$\theta = \dfrac{2k\pi}{3}$ のときである．周期性を考えて，$\theta = \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}$ の場合を求めればよい．よって，求める点は

$$\therefore \left(-\frac{1}{a},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \left(\frac{1}{a},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

である．

■

✎注　つまり，操作 T は「角度を 2 倍すること」だったわけです．なので (2) の答えが $\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$ なのも納得できます．なぜなら，$\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$ は $\theta = 0$ の場合だからです．$\theta = 0$ なら $2\theta = 0$ なので，$\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$ 操作 T で動かないのです．

✎注　(1) の後半について．式 ② に $x^2 = b^2(1 - y^2)$ を代入しましたが，そんな事をしなくてもできます．式 ② が式 $x^2 + b^2y^2 = b^2$ と「整式として」一致するわけですから，両者の係数を比較すればよろしい．つまり，

$x^2 + b^2y^2 = b^2$ の両辺を 2 乗して

$$x^4 + 2b^2x^2y^2 + b^4y^4 - b^4 = 0$$

式 ② と係数比較して

$$2b^2 = 4\left(b^2 - \frac{2}{a^2}\right)$$

$$b^4 = \frac{16}{a^4}$$

$$b^4 = \frac{4b^2}{a^2}$$

この 3 つの関係式からいずれも $ab = 2$ が得られます．

＜解答＞

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
$\dfrac{16}{a^4}$	$\dfrac{4b^2}{a^2}$	$\dfrac{2}{a}$	$\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$	2θ	$\left(-\dfrac{1}{a},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\dfrac{1}{a},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

【3】 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

（1）定積分

$$I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

を考える．このとき $I_0=\boxed{\text{ア}}$ である．また，$n\geqq 1$ に対し部分積分により定積分を計算すると，I_{n-1} から I_n を求めるための漸化式 $I_n=\boxed{\text{イ}}\,I_{n-1}$ が得られる．

（2）定積分

$$J_n=\int_0^1 x^n\sqrt{3-2x-x^2}\,dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

を考え，$n\geqq 1$ に対し J_{n-1}，J_n，J_{n+1} の間の関係を求める．$2J_n+2J_{n+1}$ を部分積分により計算すると，漸化式 $J_{n+1}=\boxed{\text{ウ}}\,J_n+\boxed{\text{エ}}\,J_{n-1}$ が得られる．

考え方　部分積分を利用して漸化式をたてる問題は，過去にも類題が出題されています．

解　（1）$I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

$$I_0=\int_0^1\sqrt{1-x}\,dx=\left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
I_n&=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx\\
&=\int_0^1 x^n\left(-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right)'\,dx\\
&=\left[x^n\left(-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right)\right]_0^1-\int_0^1(x^n)'\left(-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right)dx\\
&=\frac{2}{3}n\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{\frac{3}{2}}\,dx\\
&=\frac{2}{3}n\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}\,dx\\
&=\frac{2}{3}n\int_0^1\left(x^{n-1}\sqrt{1-x}-x^n\sqrt{1-x}\right)dx\\
&=\frac{2}{3}n(I_{n-1}-I_n)\\
&=\frac{2}{3}nI_{n-1}-\frac{2}{3}nI_n
\end{aligned}$$

よって，

$$\left(1+\frac{2}{3}n\right)I_n=\frac{2}{3}nI_{n-1}$$

$$\therefore\quad I_n=\frac{\frac{2}{3}n}{1+\frac{2}{3}n}I_{n-1}=\frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$$

（2）$J_n = \int_0^1 x^n\sqrt{3-2x-x^2}\,dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

$$\begin{aligned}
2J_n + 2J_{n+1} &= \int_0^1 \left(2x^n\sqrt{3-2x-x^2} + 2x^{n+1}\sqrt{3-2x-x^2}\right)\,dx \\
&= \int_0^1 x^n(2+2x)\sqrt{3-2x-x^2}\,dx \\
&= \int_0^1 x^n\left(-\frac{2}{3}(3-2x-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)'\,dx \\
&= \left[\,x^n\left(-\frac{2}{3}(3-2x-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 (x^n)'\left(-\frac{2}{3}(3-2x-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)\,dx \\
&= \frac{2}{3}n\int_0^1 x^{n-1}(3-2x-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx \\
&= \frac{2}{3}n\int_0^1 x^{n-1}(3-2x-x^2)\sqrt{3-2x-x^2}\,dx \\
&= \frac{2}{3}n\int_0^1 \left(3x^{n-1}\sqrt{3-2x-x^2} - 2x^n\sqrt{3-2x-x^2} - x^{n+1}\sqrt{3-2x-x^2}\right)\,dx \\
&= \frac{2}{3}n(3J_{n-1} - 2J_n - J_{n+1}) \\
&= 2nJ_{n-1} - \frac{4}{3}nJ_n - \frac{2}{3}nJ_{n+1}
\end{aligned}$$

よって，

$$\left(2+\frac{2}{3}n\right)J_{n+1} = \left(-\frac{4}{3}n-2\right)J_n + 2nI_{n-1}$$

$$\therefore\quad J_{n+1} = \frac{-\frac{4}{3}n-2}{2+\frac{2}{3}n}J_n + \frac{2n}{2+\frac{2}{3}n}J_{n-1} = -\frac{2n+3}{n+3}J_n + \frac{3n}{n+3}J_{n-1}$$

■

＜解答＞

ア	イ	ウ	エ
$\frac{2}{3}$	$\frac{2n}{2n+3}$	$-\frac{2n+3}{n+3}$	$\frac{3n}{n+3}$

【4】 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

a は整数の定数とする．x に関する 4 次方程式

$$5x^4-6x^3+ax^2+x=0$$

を考える．この方程式が

- 整数の解 α
- 整数でない正の有理数の解 β
- 無理数の解 γ_1，γ_2（順不同）

を持つとき，$a=\boxed{\text{ア}}$ であり，4 つの解は $\alpha=\boxed{\text{イ}}$，$\beta=\boxed{\text{ウ}}$，$\gamma_1=\boxed{\text{エ}}$，$\gamma_2=\boxed{\text{オ}}$ である．

考え方 整数係数の方程式の解に関する問題です．因数分解した式 $x(5x^3-6x^2+ax+1)=0$ を見れば，$\alpha=0$，$\beta=\dfrac{1}{5}$ はすぐに分かるし，必然的に a の値も，γ_1，γ_2 の値も分かるので，簡単に解決します．答えだけの問題なのでそれで十分ですが，きちんと証明しながら解いてみます．

解

$5x^4-6x^3+ax^2+x=0$

$x(5x^3-6x^2+ax+1)=0$

$\therefore\ \ x=0,\quad 5x^3-6x^2+ax+1=0$

したがって，$\alpha=0$ であり，3 次方程式

$5x^3-6x^2+ax+1=0$ の 3 つの解が β，γ_1，γ_2 ということになる．

整数でない正の有理数 β を $\beta=\dfrac{p}{q}$（p，q は互いに素な自然数．$q\neq 1$）とおく．

$$5\left(\frac{p}{q}\right)^3-6\left(\frac{p}{q}\right)^2+a\left(\frac{p}{q}\right)+1=0$$

両辺に q^2 をかけて

$$\frac{5p^3}{q}-6p^2+apq+q^2=0$$

$$\frac{5p^3}{q}=6p^2-apq-q^2$$

（右辺）は整数であるので，$\dfrac{5p^3}{q}$ も整数でなければならない．p，q は互いに素な自然数で $q\neq 1$ だから $q=5$．よって

$$p^3-6p^2+5ap+25=0$$

$$25=p(-p^2+6p-5a)$$

p は 25 の約数で，$q=5$ と互いに素であるので $p=1$．したがって，

$$\beta=\frac{1}{5}$$

である．

$5x^3-6x^2+ax+1=0$ の解の一つが $x=\dfrac{1}{5}$ なので，

$$5\left(\frac{1}{5}\right)^3-6\left(\frac{1}{5}\right)^2+a\left(\frac{1}{5}\right)+1=0$$

$$\therefore\ \ a=-4$$

したがって，

$$5x^3-6x^2-4x+1=0$$

$$(5x-1)(x^2-x-1)=0$$

$$x=\frac{1}{5},\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

よって，

$$\gamma_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \gamma_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

である．

■

＜解答＞

ア	イ	ウ	エ	オ
-4	0	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

【5】 $x>0$ において関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ を考える．$y=f(x)$ の増減表を参考にして以下の問に答えよ．ただし，解答の過程も解答欄に記せ．

(1) 正の実数 a，b （$a<b$）が $a^b=b^a$ を満たすならば $a<e<b$ が成り立つことを証明せよ．ただし，e は自然対数の底を表す．

(2) $\alpha^\beta=\beta^\alpha$ を満たす正整数 α，β （$\alpha<\beta$）をすべて求めよ．

考え方　最後の最後で有名問題の登場です．グラフも有名です．あるレベル以上の受験生ならば，この問題（の類題）は解いたことあるでしょう．問題文に「増減表を参考にして」としか書いてませんが，やはり答案には増減表やグラフをキチンと書くべきでしょうね．グラフの凹凸は不要で良いでしょう．

解

$y'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

（$y'=0$ となる x は $x=e$）

よって，$y=f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=-\infty.$

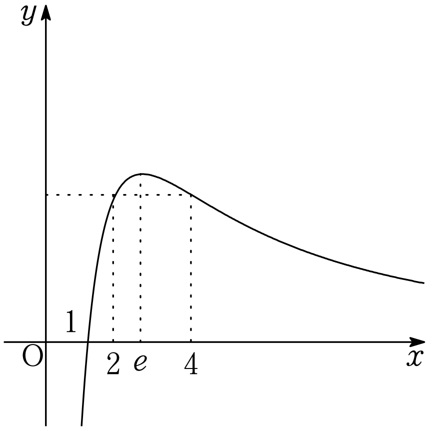
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ について．

$\log x=t$ とおくと，$e^t=x$ であり，

$x\longrightarrow\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ なので，

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0.$

よって，グラフの概形は以下の通り．



(1) $a^b=b^a$ の両辺は正なので，

$$\log a^b=\log b^a$$

$$b\log a=a\log b$$

$$\frac{\log a}{a}=\frac{\log b}{b}$$

$$\therefore\ f(a)=f(b)$$

したがって，$0<a<b$ なる a,b で，$f(a)=f(b)$ を満たすのは，増減表より，

$$0<a<e,\quad e<b$$

である．

$$\therefore\ a<e<b$$

(2) (1) と同様に，

$$\alpha^\beta=\beta^\alpha\iff f(\alpha)=f(\beta)$$

(1) の結果より，$0<\alpha<e<\beta$ であり，α，β は正整数なので，

$$\alpha=1,\ 2$$

(i) $\alpha=1$ のとき，

$f(1)=0$ であり，グラフより $f(x)=0$ となる x は $x=1$ のみなので，$f(1)=f(\beta)$ を満たす β （$\beta>1$）は存在しない．

(i) $\alpha=2$ のとき，

$f(2)=\dfrac{\log 2}{2}$

$f(4)=\dfrac{\log 4}{4}=\dfrac{2\log 2}{4}=\dfrac{\log 2}{2}$

なので，$f(2)=f(4)$

$x>e$ において $f(x)$ のグラフは単調減少であるので，$f(2)=f(\beta)$ を満たす β （$\beta>1$）は $\beta=4$ のみである．

(i)(ii) より

$$\therefore\ \alpha=2,\ \beta=4$$

■