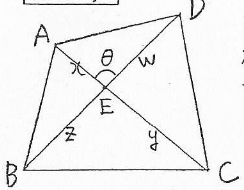
三角形の面積について

受験生なら、これから紹介する公式は もちろん、全部知ってないとダメだよ～

三角形の面積が「(底辺)×(高さ)÷2」で求められることは、小学校で学習しましたが、この公式から、他にもいろいろな三角形の面積公式が導き出されます。よく使われる公式をまとめておきましょう。状況に応じて上手に使い分けることが大切です。

おまけ

これは使えそうだ



対角線ACとBDのなす角をθとすると四角形ABCDの面積は $\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\theta$

三角形ではありませんが重要な公式なので紹介します。

㊟ ACとBDの交点をEとし、図のように x, y, z, w を定めると

四角形ABCD $=\triangle EAD+\triangle EBD+\triangle ECB+\triangle EDC$

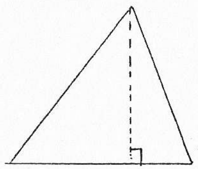
$=\frac{1}{2}xw\sin\theta+\frac{1}{2}xz\sin(180^\circ-\theta)+\frac{1}{2}zy\sin\theta+\frac{1}{2}yw\sin(180^\circ-\theta)$

$=\frac{1}{2}(xw+xz+zy+yw)\sin\theta$

$=\frac{1}{2}(x+y)(z+w)\sin\theta=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\theta$

公式①

これは知ってる～　ここから始まるんやなあ～

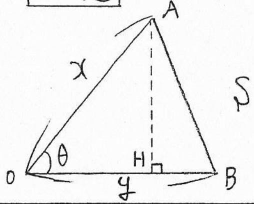


$$S=(底辺)\times(高さ)\times\frac{1}{2}$$

（㊟ …これは不要でしょう…？ わかるやろ。）

公式②

これも知ってる～



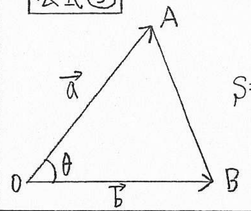
$$S=\frac{1}{2}xy\sin\theta$$

㊟ $\sin\theta=\frac{AH}{OA}=\frac{AH}{x}$ 　∴ $AH=x\sin\theta$

公式①より、$S=y\times x\sin\theta\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}xy\sin\theta$

公式③

初めて見たかも～



$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

$(\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b})$

㊟ 公式②より $S=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

$=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$

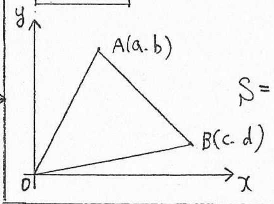
$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

"絶対値"と"内積"を逆にしないようにしよう!!

公式④

ちらっと、どっかで見たことある～



$$S=\frac{1}{2}|ad-bc|$$

㊟ $\overrightarrow{OA}=\binom{a}{b}$, $\overrightarrow{OB}=\binom{c}{d}$ とすると

$|\overrightarrow{OA}|^2=a^2+b^2$, $|\overrightarrow{OB}|^2=c^2+d^2$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=ac+bd$

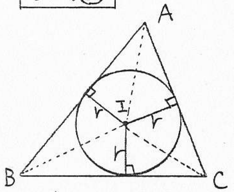
$S=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2}$ 　展開して整理

$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2d^2-2abcd+b^2c^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(ad-bc)^2}=\frac{1}{2}|ad-bc|$

公式⑤

これもわかるわ～ 有名なやつや～



$$S=\frac{r}{2}(a+b+c)$$

（rは△ABCの内接円の半径）

㊟ $\triangle ABC=\triangle IBC+\triangle ICA+\triangle IAB$

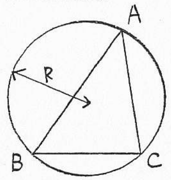
$=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$

∴ $S=\frac{r}{2}(a+b+c)$

← Iは△ABCの内心です

公式⑥

これは知らん～



$$S=\frac{abc}{4R}$$

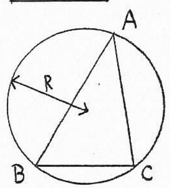
（Rは△ABCの外接円の半径）

㊟ 正弦定理より $\sin A=\frac{a}{2R}$

公式②より、$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\frac{a}{2R}=\frac{abc}{4R}$

公式⑦

これも知らん～



$$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

（Rは△ABCの外接円の半径）

㊟ 正弦定理より $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$

公式⑥より $S=\frac{abc}{4R}=\frac{2R\sin A\cdot 2R\sin B\cdot 2R\sin C}{4R}$

$=2R^2\sin A\sin B\sin C$

(※) 公式⑤、公式⑥について

$a+b+c=\frac{2S}{r}$, 　$abc=4RS$ 　だから

rが一定のとき 　$a+b+c$ の Max. min

$\Longleftrightarrow$ S の Max. min

Rが一定のとき 　abc の Max. min

$\Longleftrightarrow$ S の Max. min

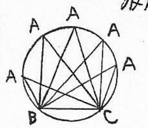
Sの Max. min に おきかえて考えられる

いずれにしても 和 $a+b+c$ は rと相性がよい。積 abc は Rと相性がよい。ことは、頭に入れておこう。

単に公式に当てはめるだけの問題はつまらないので、ここで、難しいが、重要な問題を紹介しよう。

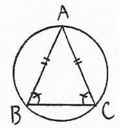
〈問題〉 半径1の円に内接する△ABCにおいて $\sin A\sin B\sin C$ の最大値を求めよ（京大・改）

〈解答〉 $S=2\sin A\sin B\sin C$ より 面積Sが最大のとき、$\sin A\sin B\sin C$ は最大になる。



辺BCを固定して考える（∠A：一定）

このとき AB=AC のとき △ABCの面積は最大になる（仮のMax）。このとき ∠B=∠C，つまり $A+2B=180^\circ$



ムツカシ～

$\sin A\sin B\sin C$

$=\sin A\sin^2 B$

$=\sin A\cdot\frac{1-\cos 2B}{2}$ 　← $2B=180^\circ-A$ より $\cos 2B=\cos(180^\circ-A)=-\cos A$

$=\frac{1}{2}\sin A(1+\cos A)$ ← これのMaxをしらべる

理系用

$f(A)=\frac{1}{2}\sin A(1+\cos A)$

$f'(A)$を考えて $f(A)$のグラフを求めてMaxを決める。

文系用

$=\frac{1}{2}\sqrt{(1-\cos^2 A)(1+\cos A)^2}$

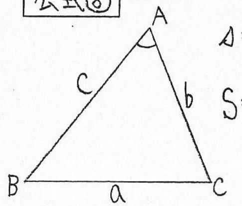
$=\frac{1}{2}\sqrt{(1-t^2)(1+t)^2}$

として $g(t)=(1-t^2)(1+t)^2$ のグラフを調べる。

← この問題はムチャクチャ大切なので、また取り上げます。

公式⑧

ヘロンさんって、世界で最初に自動販売機を発明した人らしいで～ 　ふーん



$s=\frac{a+b+c}{2}$ として

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

（ヘロンの公式）

㊟ 公式②より $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 A}$

$=\frac{1}{2}bc\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(bc+\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)\left(bc-\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{2}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2}}$

$=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}$

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

これも公式②からきてるんやなあ