視覚的に解く！

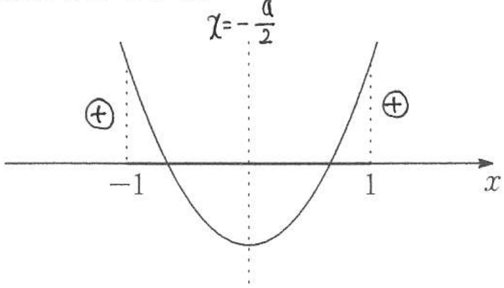
ジ〜ッ

定番の2次方程式の解の配置問題ですが，少し視点を変えて解いてみましょう．

例題 1
2次方程式 $x^2+ax+a=0$ 異なる2つの実数解をもち，その絶対値がいずれも1より小さい．このような実数 a の値の範囲を求めよ．

ようするに，$-1<x<1$ で2つの異なる実数解をもてばよいので，普通に考えれば次のような解答になるでしょう．「判別式」「軸の位置」「端点の様子」というのお決まりの3点セットです．

解 $f(x)=x^2+ax+a$ とおく．$f(x)=0$ 判別式を D とする．



$y=f(x)$ のグラフが上図のようになればよいので，求める条件は，

- $D>0$
- $y=f(x)$ の軸 $x=-\frac{a}{2}$ に対して，$-1<-\frac{a}{2}<1$
- $f(-1)>0$ かつ $f(1)>0$

である．

このへんは楽勝〜　完ペキ〜

$D>0$ より，$a^2-4a>0$．ゆえに，$a<0,\ 4<a$
$-1<-\frac{a}{2}<1$ より，$-2<a<2$
$f(-1)>0$ より，$1>0$．これは常に成り立つ．
$f(1)>0$ より，$1+2a>0$．ゆえに，$a>-\frac{1}{2}$
これらの共通部分をとると，$-\frac{1}{2}<a<0$

■

この解答は基本中の基本なので，これはこれでしっかりと理解しておく必要がありますが，少し視点を変えると面白い考え方で解くことができます．

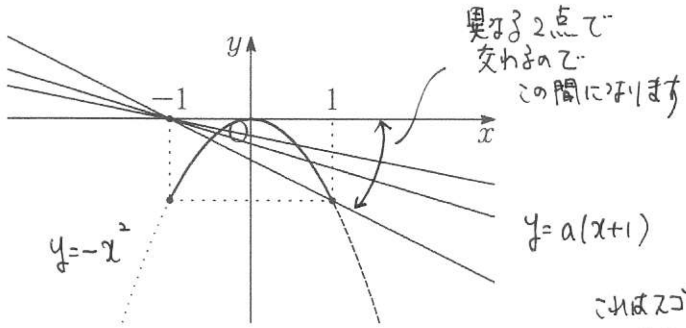
次のような解答はいかがでしょうか．

解 $x^2+ax+a=0$ から，$a(x+1)=-x^2$．

よって，直線 $y=a(x+1)$ と放物線 $y=-x^2$ が $-1<x<1$ の範囲で異なる2点で交われば良い

フムフム

$y=a(x+1)$ は点 $(-1,\ 0)$ を通る傾き a の直線を表しているので，それぞれの直線，曲線の位置関係は図の通り．



これはスゴイ　オモロ〜

$y=a(x+1)$ が点 $(1,\ -1)$ を通るとき，$-1=a(1+1)$ から $a=-\frac{1}{2}$
点 $(0,\ 0)$ を通るとき，$0=a(0+1)$ から $a=0$
よって，図より，$-\frac{1}{2}<a<0$ となる

■

直線 $y=a(x+1)$ が常に点 $(-1,\ 0)$ を通っていることがポイントでした．a の変化に伴って直線がどのように動くのかしっかりイメージしよう．このようにグラフの変化の様子を捉え，視覚的に解くことはとても重要な数学的な考え方のひとつです．

参考 $x^2+ax+a=0$ から，($x \neq -1$ を確認した上で) $a=-\frac{x^2}{x+1}$ とし，曲線 $y=-\frac{x^2}{x+1}$ のグラフと直線 $y=a$ (x 軸に平行な直線) が $-1<x<1$ の範囲で異なる2点で交わる条件を考えてもかまいません．$y=-\frac{x^2}{x+1}$ のグラフは数学 III の知識があれば書くことができます．そんなに難しくはありません．どのような形になるのかは，今後のお楽しみといたしましょう．

はーい　待ってまーす

例題 2
$ax^2-x+2a-3=0$ が $-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲に少なくとも1つの解をもつような a の値の範囲を求めよ．

先ほどと同じような問題ですが，「$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲に少なくとも1つの解をもつ」ということは，解が1つの場合と2つの場合があるので，それぞれを考えねばなりません（「$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲に解

たしかに メンドウ…

a=0の場合もあるし…

キツイ

をもたない」の否定を考えても OK）．また，x^2 の係数 a の符号によってグラフの形が変わってくるので，それに関しても考えねばなりません．いれずれにせよ正攻法で解くならば，泣きそうになるくらいメンドウな場合分けをすることになるでしょう．

これも視覚的に解いてみましょう．

解　$ax^2-x+2a-3=0$ より，

$a(x^2+2)=x+3 \quad \cdots$ ①

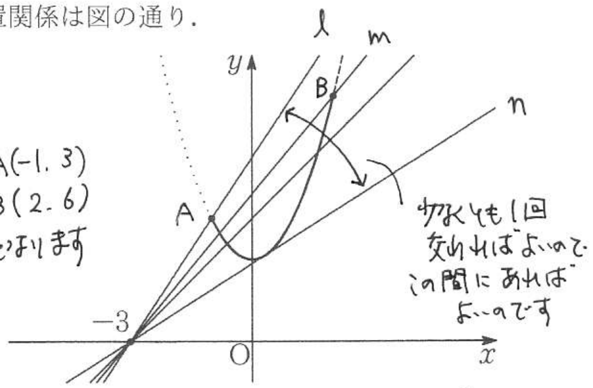
ここで $a=0$ の場合を考えると，①は $x+3=0$ となり，$x=-3$．これは，$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲にないので不適．$\therefore a \neq 0$．

よって，①の両辺を a で割って，

$x^2+2=\dfrac{1}{a}(x+3)$ とする．

したがって，2 つのグラフ $y=x^2+2$ と $y=\dfrac{1}{a}(x+3)$ が，$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で少なくとも 1 回交わるための a の条件を考えればよい．

$y=\dfrac{1}{a}(x+3)$ は点 $(-3,\ 0)$ を通る傾き $\dfrac{1}{a}$ の直線を表しているので，それぞれの直線，曲線の位置関係は図の通り．



たのし〜

図のように 2 点 A，B を定め，$y=\dfrac{1}{a}(x+3)$ が点 A を通るときを l，点 B を通るときを m とすると，

$\boxed{\text{直線 } l \text{ の傾き}}$

2 点 $(-3,\ 0)$，$(-1,\ 3)$ を通るから，傾きは $\dfrac{3}{2}=\dfrac{15}{10}$．

$\boxed{\text{直線 } m \text{ の傾き}}$

2 点 $(-3,\ 0)$，$(2,\ 6)$ を通るから，傾きは $\dfrac{6}{5}=\dfrac{12}{10}$．

つまり，直線 l の方が傾きが大きい．

したがって，2 次関数 $y=x^2+2$ の $-1 \leqq x \leqq 2$ の部分と，直線 $y=\dfrac{1}{a}(x+3)$ が少なくとも 1 回交わるためには，図のように直線 $y=\dfrac{1}{a}(x+3)$ が，点 A を通る直線 l と放物線に接する直線 n の間に存在すればよい．

なるほど　ナットク!!

$\boxed{\text{直線 } n \text{ の傾き}}$

2 点 $(-3,\ 0)$ を通る傾き k の直線が放物線 $y=x^2+2$ と接するとすると，

$x^2+2=k(x+3)$ より，$x^2-kx+2-3k=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，判別式 $D=0$ より，

$(-k)^2-4(2-3k)=0$

$k^2+12k-8=0 \qquad \therefore\ k=-6\pm 2\sqrt{11}$

図より，傾きは正なので $k=-6+2\sqrt{11}$．これが直線 n の傾きである．

以上より，直線 $y=\dfrac{1}{a}(x+3)$ が直線 l と直線 n の間にあるための条件は

$$-6+2\sqrt{11} \leqq \frac{1}{a} \leqq \frac{3}{2}$$

$-6+2\sqrt{11}>0$ なので，各項の逆数を考えて，

注参照

$$\frac{2}{3} \leqq a \leqq \frac{1}{-6+2\sqrt{11}}$$

$$\therefore\ \frac{2}{3} \leqq a \leqq \frac{3+\sqrt{11}}{4}$$

■

直線 $y=\dfrac{1}{a}(x+3)$ が常に点 $(-3,\ 0)$ を通っていることがポイントでした．a の変化に伴って直線がどのように動くのかしっかりイメージしよう．このようにグラフの変化の様子を捉え，視覚的に解くことはとても重要な数学的な考え方のひとつです．

注　解答の最後，逆数をとるところで，「$-6+2\sqrt{11}>0$ なので」という理由はかなり重要です．例えば，

$2 \leqq \dfrac{1}{a} \leqq 3 \Longrightarrow \dfrac{1}{3} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$

は正しいですが，

$-2 \leqq \dfrac{1}{a} \leqq 3 \Longrightarrow \dfrac{1}{3} \leqq a \leqq \dfrac{1}{-2}$

は正しくありません．

（正しくは $a \leqq -\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3} \leqq a$）　なんでこうなるの？

ふーん 知らんかったわ 気いつけとこ

つまり，各項が正のときでないと，安易に逆数をとってはならないのです

参考　$ax^2-x+2a+3=0$ から，$a=\dfrac{x-3}{x^2+2}$ とし，曲線 $y=\dfrac{x-3}{x^2+2}$ のグラフと直線 $y=a$（x 軸に平行な直線）が $-1<x<2$ の範囲で異なる 2 点で交わる条件を考えてもかまいません．$y=\dfrac{x-3}{x^2+2}$ のグラフは数学 III の知識があれば書くことができます．そんなに難しくはありません．どのような形になるのかは，今後のお楽しみといたしましょう．

はーい

待ってまーす