オリスタ基本問題を全問解説しましょう

（第19章〜第28章まで）

19　導関数

この章は「微分せよ」という問題なので，解説するつもりはなかったんですが，例年，この問題だけ質問があるので，この問題だけ解説入れときます．

> $\boxed{30}$ （2） $x=2\theta-\sin\theta$，$y=2-\cos\theta$（θ は媒介変数）のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

考え方　まず記号の意味ですが，

$\dfrac{dy}{dx}$ …… y を$\underline{x\text{ で}}$1回微分する

$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ …… y を$\underline{x\text{ で}}$2回微分する

ようするに $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ は y'' のことで，$\dfrac{dy}{dx}$ つまり y' をもう1回 $\underline{x\text{ で}}$ 微分したものです．

つまり，$\dfrac{dy}{dx}=Y$ とおけば，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dY}{dx}$ というだけのことです．

もしも最初から y が x の式で書かれていれば何の問題もないのですが（例えば，$y=x^3$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}=3x^2$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=6x$），今回の場合，x と y が媒介変数 θ を用いて表されているので注意が必要ですが，dx や dy，$d\theta$ を「分数の割り算」っぽく考えればなんともありません．

解　$x=2\theta-\sin\theta$ より，$\dfrac{dx}{d\theta}=2-\cos\theta$．

$y=2-\cos\theta$ より，$\dfrac{dy}{d\theta}=\sin\theta$．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\sin\theta}{2-\cos\theta}(=Y\text{ とおく})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dY}{dx}=\frac{\frac{dY}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sin\theta}{2-\cos\theta}\right)'}{2-\cos\theta}$$

$$=\frac{\frac{\cos\theta(2-\cos\theta)-\sin\theta\sin\theta}{(2-\cos\theta)^2}}{2-\cos\theta}$$

$$=\frac{\frac{2\cos\theta-1}{(2-\cos\theta)^2}}{2-\cos\theta}=\frac{2\cos\theta-1}{(2-\cos\theta)^3}$$

■

20　接線・法線

接線の問題のポイントは

・まずは接点を設定すること

・「〜における接線」と「〜を通る接線」をしっかり区別すること

に尽きます．

この基本問題 $\boxed{31}$ は，（1）が「〜における接線」で，（2）が「〜を通る接線」です．当然，アプローチ方法も変わってきます．

> $\boxed{31}$ （1） 曲線 $y=(\log x)^2$ の，直線 $y=1$ との交点における接線の方程式を求めよ．

考え方　まずは交点を求めます．「交点における」とあるので，この交点が求める接線の接点です．

解　曲線 $y=(\log x)^2$ と直線 $y=1$ との交点は，$(\log x)^2=1$ より，$\log x=\pm1$．

よって，$x=e$，$\dfrac{1}{e}$ なので，交点は2つあって，その座標は A$(e,\ 1)$，　B$\left(\dfrac{1}{e},\ 1\right)$．

また，$y=(\log x)^2$ のとき，

$y'=2(\log x)\cdot(\log x)'=\dfrac{2\log x}{x}$

より，A$(e,\ 1)$ における接線の方程式は，

$$y-1=\frac{2\log e}{e}(x-e)$$

$$y-1=\frac{2}{e}(x-e).\qquad\therefore\ y=\frac{2}{e}x-1$$

また，B$\left(\dfrac{1}{e},\ 1\right)$ における接線の方程式は，

$$y-1=\frac{2\log\frac{1}{e}}{\frac{1}{e}}\left(x-\frac{1}{e}\right)$$

$$y-1=-2e\left(x-\frac{1}{e}\right).\qquad\therefore\ y=-2ex+3$$

■

31 (2) 曲線 $y=x-\dfrac{1}{x}$ の法線のうち，原点を通るものの方程式を求めよ．

考え方　「原点を通る法線」ですが，まずは接点を決定する必要があります．接線や法線の傾きは接点で決まるからです．というわけで「セッテンセテー」がポイント．

なお，この問題では，計算上の工夫が少しだけ必要となっています．

解　$y'=1+\dfrac{1}{x^2}$

接点の座標を $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ とすると，接線の傾きは $1+\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{t^2+1}{t^2}$．この値は 0 になることはないので，法線は必ず存在し，その傾きは $-\dfrac{t^2}{t^2+1}$．

したがって，点 P における法線の方程式は

$$y-\left(t-\frac{1}{t}\right)=-\frac{t^2}{t^2+1}(x-t)$$

$$y=-\frac{t^2}{t^2+1}x+\frac{t^3}{t^2+1}+t-\frac{1}{t}\quad(※)$$

これが原点を通るので，

$$\frac{t^3}{t^2+1}+t-\frac{1}{t}=0$$

両辺を $t(t^2+1)$ 倍して，

$$t^4+t^2(t^2+1)-(t^2+1)=0$$

$$2t^4-1=0\qquad\therefore\ t^4=\frac{1}{2}$$

$t^2>0$ より，$t^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって，求める接線の方程式は

$$y=-\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}x=-\frac{1}{1+\sqrt{2}}x=(1-\sqrt{2})x$$

■

注　$t^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から，$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ として，式 (※) に代入しても良いのですが，法線が原点を通るように t を定めたわけだから，実質的に式 (※) は，

$$y=-\frac{t^2}{t^2+1}x\ (※※)$$

という形になるはずです (y 切片 $=0$ という式から t を求めたんですよ！)．

ですから，式 (※※) は t^2 で表された式なので，$t^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のままで，式 (※※) に代入して求めました．

32　2 曲線 $y=e^{\frac{x}{3}}$，$y=a\sqrt{2x-2}+b$ が $x=3$ で接するとき，定数 a，b を求めよ．

考え方　「2 曲線が接する」とは，数学的には「共通な接線をもつ」ということです．今回の場合，$y=e^{\frac{x}{3}}(=f(x)$ とおく) と $y=a\sqrt{2x-2}+b(=g(x)$ とおく) が $x=3$ で接するので，$f(x)$ と $g(x)$ の $x=3$ における接線が一致する，すなわち，

$$f(3)=g(3),\qquad f'(3)=g'(3)$$

が成立することを意味します．詳しくは『犬プリ』見といてください．

解　$f(x)=e^{\frac{x}{3}}$，$g(x)=a\sqrt{2x-2}+b$ とおくと，

$f'(x)=\dfrac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}$．　　$g'(x)=\dfrac{2a}{2\sqrt{2x-2}}$

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=3$ で接するので，

$$f(3)=g(3),\qquad f'(3)=g'(3)$$

である．

$f(3)=g(3)$ より，$e=2a+b$

$f'(3)=g'(3)$ より，$\dfrac{e}{3}=\dfrac{a}{2}$

したがって，$a=\dfrac{2}{3}e$，$b=-\dfrac{1}{3}e$．

■

21　関数の値の変化

この単元の目標は「正しくグラフをかくこと」です．以前に配布した『グラフの書き方 (まとめ)』というプリントをもう一度見直しておこう．

33　次の関数の極値を求め，そのグラフをかけ．

(1) $y=(1+\cos x)\sin x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$

(2) $y=(x+1)e^x$

考え方　いきなり微分するのではありません．まずは定義域とグラフの対称性です．これらのことは

微分する前に必ずチェックすること．凹凸の確認は今回は必要ないでしょう．

(1) の場合，$f(x) = (1 + \cos x)\sin x$ とおくと，$f(-x) = f(x)$ なので $y = f(x)$ のグラフは原点対称です．しかし，定義域が $0 \leqq x \leqq 2\pi$ なので，今回に限り対称性を意識してグラフを描く必要はありません．

(2) では $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y$ の確認が要注意．この極限は暗記しておかねばなりません．

なお，グラフの図示に関しては，問題集の巻末に掲載されているので省略させていただきます．

解　(1)

$$\begin{aligned} y' &= -\sin x \cdot \sin x + (1 + \cos x) \cdot \cos x \\ &= -\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x \\ &= -(1 - \cos^2 x) + \cos x + \cos^2 x \\ &= 2\cos^2 x + \cos x - 1 \\ &= (2\cos x - 1)(\cos x + 1) \end{aligned}$$

したがって，$y' = 0$ なる x は，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より，

$\cos x = \dfrac{1}{2}$ より，$x = \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5\pi}{3}$

$\cos x = -1$ より，$x = \pi$．

よって，グラフの増減は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5\pi}{3}$	$\cdots$	2π
y'	2	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	2
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0

である．

■

注　y' の符号を決定するところでミスが多いので注意しよう．特に $x = \pi$ の前後で符号変化が起こっていません (安易に，$+-+-\cdots$ とする人はここで間違う)．

$y' = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$ において，$\cos x + 1$ の符号が，$x = \pi$ のときだけ 0 であり，$x \neq \pi$ のときは常に正であることに注目します．つまり，y' の符号変化は $2\cos\theta - 1$ だけで決まることがポイントです．

注　$x = \pi$ のとき $y' = 0$ ですが，$x = \pi$ で極値とはなりません．符号変化が起こっていないからです．ですから，グラフも $x = \pi$ で x 軸に接しているような形になります．

(2)　$y' = 1 \cdot e^x + (x + 1)e^x = e^x(x + 2)$ したがって，$y' = 0$ なる x は，$x = -2$．よって，グラフの増減は

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$-\frac{1}{e^2}$	$\nearrow$

$$\lim_{x\to\infty}(x + 1)e^x = \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty}(x + 1)e^x &= \lim_{t\to\infty}(-t + 1)e^{-t} \\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{(-t + 1)}{e^t} = 0 \end{aligned}$$

■

$\boxed{34}$　(1)　曲線 $y = x^4 - 4x^3 - 4x + 1$ は 2 つの変曲点をもつ．その座標を求めよ．

考え方　言うまでもなく，$y = f(x)$ が $x = \alpha$ で変曲点になるということは，$x = \alpha$ の前後で $f''(x)$ の符号変化が起こるときです．

解　$y = x^4 - 4x^3 - 4x + 1$ より，

$y' = 4x^3 - 12x^2 - 4$

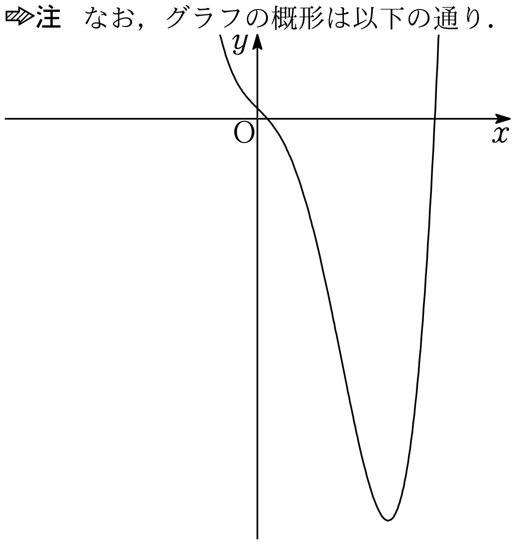
$y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$

したがって，$x = 0$ と $x = 2$ の前後で y'' の符号変化が起こっているので，このとき変曲点となる．

よって，求める変曲点は，$(0,\ 1)$，$(2,\ -23)$

■

注　なお，グラフの概形は以下の通り．



このグラフを描くのは大変です．まず，$y' = 0$ という 3 次方程式を解いて極値をとる x を求めねばなりませんが，今回の場合は因数分解できないので 3 次方程式を解くのは無理です (ちなみに実数解 1 個，虚数解 2 個になります．なので極値は 1 個だけ)．図を見ても，ちょっと分かりにくいかもしれ

ないので，大幅にデフォルメした絵を手書きで載せておきます．

> $\boxed{34}$ (2) 関数 $y=\dfrac{2x^2+5x-1}{x^2-9}$ のグラフの漸近線の方程式を求めよ．

考え方　「漸近線を求めよ」ではなく「グラフをかけ」という問題だと思いましょう．

解　定義域は $x^2-9\neq 0$ より，$x\neq\pm 3$

$$y'=\frac{(4x+5)(x^2-9)-(2x^2+5x-1)(2x)}{(x^2-9)^2}$$

$$=\frac{-(5x^2+34x+45)}{(x^2-9)^2}=\frac{-(5x+9)(x+5)}{(x^2-9)^2}$$

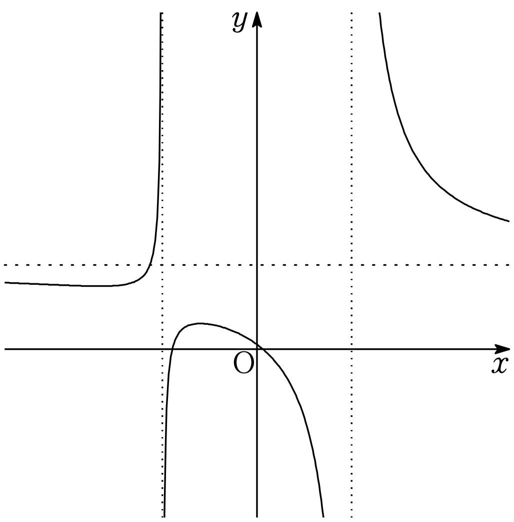
x	$\cdots$	-5	$\cdots$	-3	$\cdots$	$-\frac{9}{5}$	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$
y	↘	$\frac{3}{2}$	↗	$\times$	↗	$\frac{11}{18}$	↘	$\times$	↘

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-1}{x^2-9}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+5x-1}{x^2-9}=2$$

したがって，求める漸近線は $y=2$，$x=\pm 3$

■



このグラフも分かりにくいと思います．まず $x\longrightarrow\infty$，$x\longrightarrow-\infty$ のときに，$y\longrightarrow 2$ だから，$y=2$ が漸近線です．また，定義域より $x\neq\pm 3$ なので，グラフは $x=3$ と $x=-3$ に近づいていくと思われるので，$x=3$ と $x=-3$ も漸近線です．

22　最大・最小

> $\boxed{35}$ 関数 $y=\dfrac{x-3}{x^2+1}$ の最大値と最小値を求めよ．

考え方　いきなり微分するのではありません．まずは定義域とグラフの対称性です．これらのことは微分する前に必ずチェックすること．凹凸の確認は今回は必要ないでしょう．

まず，定義域は分母の形に注目すると，特に制限はなさそうです．よって「定義域は全ての実数」．対称性については特に何もなさそうです（各自で確認）．

解　$$y'=\frac{1(x^2+1)-(x-3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-(x^2-6x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$x^2-6x-1=0$ のとき $x=3\pm\sqrt{10}$

よって，グラフの増減は

x	$\cdots$	$3-\sqrt{10}$	$\cdots$	$3+\sqrt{10}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$-\frac{3+\sqrt{10}}{2}$	↗	$\frac{-3+\sqrt{10}}{2}$	↘

である．

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-3}{x^2+1}=0$，　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3}{x^2+1}=0$

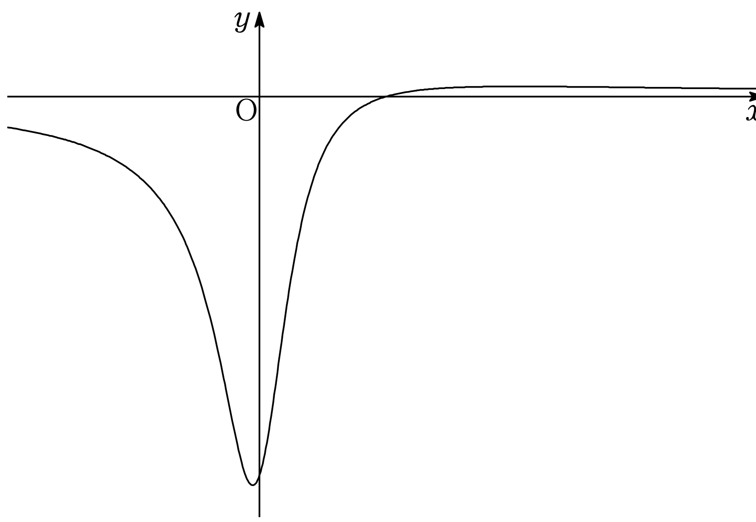
よって，グラフは下図のようになるので，

$x=3+\sqrt{10}$ のとき最大値 $\dfrac{-3+\sqrt{10}}{2}$（ほとんど 0 に近い正の数）

$x=3-\sqrt{10}$ のとき最小値 $-\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}$

となる．

■



注　これも分かりにくいグラフですが，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=0$ なので，$\dfrac{-3+\sqrt{10}}{2}$ が限りなく 0 に近い正の数ですがこれが最大値になります．いずれにしても，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y$ や $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y$ の確認をして，正しく

グラフを書くこと．

36　等脚台形 ABCD において，各辺の長さは BA = AD = DC = a(一定) とし，辺 BC の長さは任意である．このとき台形の面積 S の最大値を求めよ．

考え方　面積の最大値を求めるのだから，面積を何らかの文字を使って表し，その文字の関数として考える必要があります．ここで注意したいのは a は定数であるということです．だから面積を a の関数として考えることはできません (つまり a だけの式で表すことができないということです)．では，どうするのか．変化する箇所を文字設定して考えるべきです．

本問の場合，BA = AD = DC = a を満たしながら台形をいろいろ動かしていくと，「辺 BC の長さ」や「高さ」または「∠ABC」が変化していることに気づきます．つまり，

① BC = x とおく．
② 高さ = h とおく．
③ ∠ABC = θ とおく．

の 3 通りの文字設定の可能性が出てきます．それぞれの場合に台形の面積を x や h や θ で表すことになります．

では，どの方法をとるべきか．少し考えればどちらの方がラクかは判断がつくでしょう．

今回の場合，長さを変数に設定するとどうしても三平方の定理から $\sqrt{\quad}$ を含んだ式が登場してしまいます．まあ，別に構わないんですが，微分して増減表を書くとなると，ちょっとメンドウになるでしょう．しかし，角度を変数に取った場合はかなり面積の式がシンプルになります．よって，今回は角度を変数にとって考えて見ます．

一般的に，図形問題では角度を変数として設定するとうまくいくことが多いようです．覚えておきましょう．

解　∠ABC = θ $\left(0<\theta<\dfrac{2\pi}{3}\right)$ とおく．

台形 ABCD において辺 BC を底辺にとったときの高さは，$a\sin\theta$．また，BC = $2a\cos\theta + a$ なので，

$$\begin{aligned}S &= (a+2a\cos\theta+a)\times a\sin\theta\times\frac{1}{2}\\ &= a^2\sin\theta(1+\cos\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dS}{d\theta} &= a^2\cos\theta(1+\cos\theta)+a^2\sin\theta(-\sin\theta)\\ &= a^2(\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\ &= a^2(\cos\theta+\cos^2\theta-1+\cos^2\theta)\\ &= a^2(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)\\ &= a^2(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)\end{aligned}$$

よって，$0<\theta<\dfrac{2\pi}{3}$ におけるグラフの増減は

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$
S'		$+$	0	$-$	
S		↗		↘	

である．よって，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，最大値をとる．このとき，

$$S=a^2\sin\frac{\pi}{3}\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

■

注　θ の範囲が $0<\theta<\dfrac{2\pi}{3}$ になる理由は分かりますか．そもそも台形というのは，上底のほうが下底よりも短いとは限りません．今回の場合，BA = AD = DC = a を満たしながら台形をいろいろ変化させていくのだから，究極的には「逆正三角形」に近づいていくことになります．

注　自分の勉強のために長さを変数においてもやってみましょう．こういう経験を通して角度をおくありがたみが実感できるのです．

23　方程式への応用

次の問題は，数学 II 的解法 と 数学 III 的解法 の 2 種類あって，以前にも犬プリ『数学 III は役に立つのか』で両者を比較しながら詳しく説明しました (必ずもう一度，見ておいてください)．今回も 2 つの方法で解き比べてみましょう．

37　方程式 $2x^3-3ax^2+8=0$ が $0\leqq x\leqq 3$ の範囲に少なくとも 1 個の実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．

数学 Ⅲ 的解法

考え方　いわゆる変数分離型の典型的問題．$a = f(x)$ の形に変形し (a を分離し)，2 つのグラフ $y = a$ と $y = f(x)$ の交点を考えるという方法です．交点が $0 \leqq x \leqq 3$ に少なくとも 1 個存在するような a の範囲を 視覚的に 考えるのです．

解　$2x^3-3ax^2+8=0$ より，$3x^2a=2x^3+8$．$x=0$ のとき，式は成立しないので，$x \fallingdotseq 0$．よって，

$$2x^3-3ax^2+8=0 \iff a=\frac{2x^3+8}{3x^2}$$

したがって，3 次方程式 $2x^3-3ax^2+8=0$ の解は，2 つのグラフ $y=a$ と $y=\frac{2x^3+8}{3x^2}$ の交点の x 座標である．したがって，交点が $0 \leqq x \leqq 3$ に少なくとも 1 個存在するような a の範囲を調べればよい．

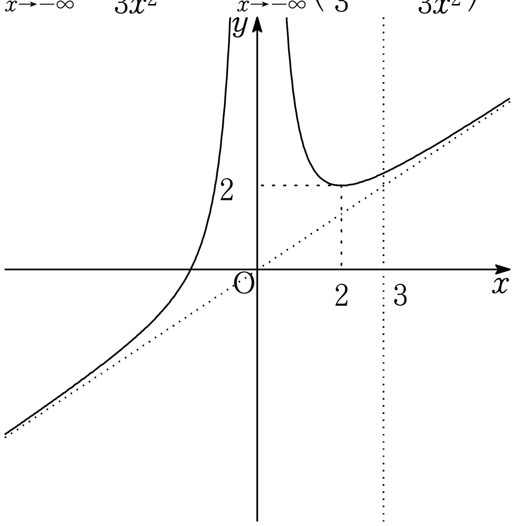
$f(x)=\frac{2x^3+8}{3x^2}$ とおく．

$$f'(x)=\frac{6x^2\cdot 3x^2-(2x^3+8)\cdot 6x}{(3x^2)^2}=\frac{6x^4-48x}{9x^4}$$
$$=\frac{6(x^3-8)}{9x^3}=\frac{2(x-2)(x^2+2x+4)}{3x^3}$$

よって，$y=f(x)=\frac{2x^3+8}{3x^2}$ の増減表は以下の通り．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'	$+$		$-$	0	$+$	
y	$\nearrow$		$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{62}{27}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+8}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}x+\frac{8}{3x^2}\right)=\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+8}{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}x+\frac{8}{3x^2}\right)=-\infty$$



よってグラフより，$0 \leqq x \leqq 3$ の範囲内で，$y=a$ と少なくとも 1 回交わるために a の条件は，$a \geqq 2$ である．

■

注　上の解答では触れませんでしたが，$y=f(x)$ には漸近線が存在します．

$f(x)=\frac{2x^3+8}{3x^2}=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3x^2}$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left\{f(x)-\frac{2}{3}x\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{3x^2}=0,$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left\{f(x)-\frac{2}{3}x\right\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8}{3x^2}=0$$

よって，$y=\frac{2}{3}x$ が漸近線となります．

数学 Ⅱ 的解法

考え方　数学 Ⅱ では分数関数のグラフはかけないので，a を分離せずに $2x^3-3ax^2+8=0$ の式をそのまま考えます．つまり，$g(x)=2x^3-3ax^2+8$ のグラフを考え，このグラフが x 軸と $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲内で少なくとも 1 回交わる条件を考えればよいのです．

まず，$g'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$ なので，極値をとる可能性があるのは，$x=0$ と $x=a$ です．

$y=g(x)$ が x 軸と $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲内で少なくとも 1 回交わるためには，グラフの形がどのようになればよいのかしっかりとイメージする必要があります．当然，a による場合わけからスタートします．

今回の場合，$g(0)=8>0$ であることがいろんな意味で利いてきます．たまたまですけど．

解　$g(x)=2x^3-3ax^2+8$ とおくと．$g'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$

(i)　$a=0$ のとき

$g'(x) \geqq 0$ なので，$y=g(x)$ のグラフは単調増加である．

$g(0)=8>0$ なので，$x \geqq 0$ において $g(x)>0$ だから $y=g(x)$ のグラフが $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲内で x 軸と交わることはない．

(ii)　$a<0$ のとき，$y=g(x)$ のグラフの増減表は以下のようになる．

x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$g(0)=8>0$ なので，$x \geqq 0$ において $g(x)>0$ だから $y=g(x)$ のグラフが $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲内で x 軸と交わることはない．

(ii) $a>0$ のとき，$y=g(x)$ のグラフの増減表は以下のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$g(0)=8>0$ なので，$y=g(x)$ グラフが $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲内で x 軸少なくとも 1 回交わるための条件は次のとおり．

（ア）$0<a \leqq 3$ のとき $g(a) \leqq 0$ であれば良い．

このとき，$g(a)=8-a^3=(2-a)(4+2a+a^2) \leqq 0$ より $a \geqq 2$.

よって，$2 \leqq a \leqq 3$

（イ）$a \geqq 3$ のとき $g(3) \leqq 0$ であれば良い．

このとき，$g(3)=62-27a$ なので $a \geqq 3$ のとき常に $g(3) \leqq 0$ となるので，$a \geqq 3$ は条件に適する．

よって，(ア)(イ) より，$a \geqq 2$ である．

したがって，(i)(ii)(iii) より，求める a の範囲は，$a \geqq 2$.

■

38 多項式 $f(x)$ について，$f(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れるとき，$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ であることを証明せよ．

考え方 大雑把な言い方をすれば，当たり前です．$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ ということは，$y=f(x)$ が x 軸と $x=\alpha$ で接していることを意味しています．つまり $x=\alpha$ を重解にもつということ．だから $f(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れるのは当然のことです．

解 $f(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れるとき，$f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)$ とおける．

よって $f(\alpha)=0$．また，このとき，

$$f'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)$$

である．したがって，$f'(\alpha)=0$.

よって以上より，$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ が成立する．

■

参考 参考までに「逆」を示してみましょう．つまり，

$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ が成立するならば，$f(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れることを示せ．

解 $f(\alpha)=0$ より，$f(x)=(x-\alpha)g(x)$ とおける．このとき，

$$f'(x)=g(x)+(x-\alpha)g'(x)$$

$f'(\alpha)=0$ より，$g(\alpha)=0$.

したがって，$g(x)=(x-\alpha)h(x)$ とおけるので，

$$f(x)=(x-\alpha)g(x)=(x-\alpha)^2h(x)$$

となり，$f(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れる．

■

このことから「必要十分条件」であることがわかりました．

24　不等式への応用

39 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x$ が成り立つことを証明せよ．またこの式を用いて，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $\cos x \leqq 1-\dfrac{1}{\pi}x^2$ が成り立つことを証明せよ．

考え方 グラフを利用して不等式を証明する問題は，頻出の定番問題です．

前半部分の証明

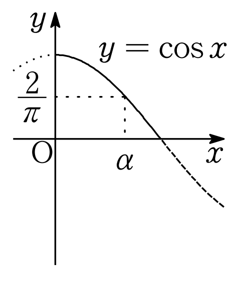
解 1

$f(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x$ とおくと，

$f'(x)=\cos x-\dfrac{2}{\pi}$.

$0<\dfrac{2}{\pi}<1$ なので，$f'(x)=0$ なる x が $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ 内にただ一つ存在する．

そのときの x を $x=\alpha$ とおく．



よって，$y=f(x)$ のグラフの増減は以下の通り．

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

したがって，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において，$f(x) \geqq 0$ だから，不等式 $\frac{2}{\pi}x \leqq \sin x$ が成り立つ．

■

解 2

$f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$ とおく．

$f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$．$f''(x)=-\sin x$

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において，$f''(x) \leqq 0$ であるので，$y=f(x)$ のグラフはこの区間において上に凸である．

また，$f(0)=0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ であるので，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において，$f(x) \geqq 0$ だから，不等式 $\frac{2}{\pi}x \leqq \sin x$ が成り立つ．

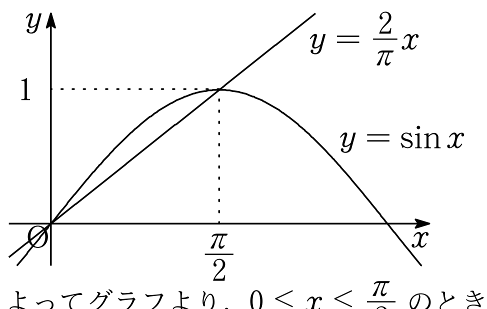
■

解 3

$y=\sin x$ について，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において，

$y'=\cos x$．$y''=-\sin x \leqq 0$

なので，$y=\sin x$ のグラフは上に凸である．よって，$y=\sin x$ と $y=\frac{2}{\pi}x$ のグラフを図示すると以下のようになる．



よってグラフより，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $\frac{2}{\pi}x \leqq \sin x$ が成り立つ．

■

注　おそらく 解 1 が最も基本に忠実な解法でしょう．交点を $x=\alpha$ とおく手法も非常に大切で，この解法はぜひともマスターしてほしいところ． 解 2 は $f''(x) \leqq 0$ であることを利用していますが，本質的に 解 1 と同じです．

その点， 解 3 の証明はかなり斬新です．たまたま偶然うまくいっただけの気もしますが，これはこれで面白い解法です．$y=\sin x$ のグラフが上に凸であることに必ず言及せねばなりません．

後半部分の証明

$g(x)=1-\frac{1}{\pi}x^2-\cos x$ とおくと，

$g'(x)=-\frac{2}{\pi}x+\sin x$

先ほどの結果より，$\frac{2}{\pi}x \leqq \sin x$ だから，$g'(x) \geqq 0$．したがって，$y=g(x)$ は単調増加であり，$g(0)=0$ なので，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $g(x) \geqq 0$ が成り立つ

■

40　任意の $x>0$ に対して，$\log x < a\sqrt{x}$ が成り立つような a の値の範囲を定めよ．

考え方　方針で悩む問題です．まずは a を分離して，$\frac{\log x}{\sqrt{x}} < a$ とし，$f(x)=\frac{\log x}{\sqrt{x}}$ のグラフを考える方法．もうひとつは素直に移項して，$a\sqrt{x}-\log x>0$ とし，$g(x)=a\sqrt{x}-\log x$ のグラフを考える方法．モノは試しにどちらの方法でも解いてみましょう．

解 1

$\log x < a\sqrt{x}$ より，$\frac{\log x}{\sqrt{x}} < a$．

ここで，$f(x)=\frac{\log x}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$ とおく．

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\log x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\log x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}$$

したがって，$f'(x)=0$ なる x は $2-\log x=0$ より $x=e^2$．よって，$y=f(x)$ のグラフの増減は以下の通り．

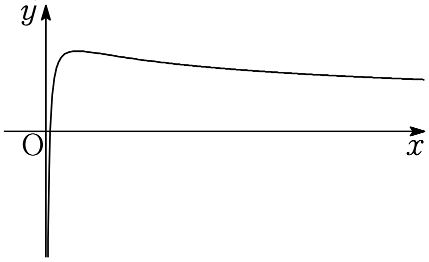
x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$

つまり，$f(x)=\frac{\log x}{\sqrt{x}}$ は $x=e^2$ のとき最大値 $\frac{2}{e}$ であるので，$\frac{\log x}{\sqrt{x}} \leqq \frac{2}{e}$．

したがって，任意の $x>0$ に対して，$\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}<a$ が成り立つような a の範囲は $a>\dfrac{2}{e}$ である．

■

✎注　ちなみに，$y=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ のグラフはこんな感じです．



$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\sqrt{x}}=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}=0$ ですが，この極限値を求めるにはハサミウチの原理を使う必要があり．ノーヒントで出題されることはありません．

解 2

$\log x<a\sqrt{x}$ より，$a\sqrt{x}-\log x>0$．

ここで，$g(x)=a\sqrt{x}-\log x\ (x>0)$ とおく．

まず，$a\leqq 0$ のとき，任意の $x>0$ に対して $g(x)>0$ とはならないので $a>0$ である．

$g'(x)=\dfrac{a}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax-2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$

したがって，$g'(x)=0$ なる x は $ax-2\sqrt{x}=0$ より，$\sqrt{x}(a\sqrt{x}-2)=0$．$x>0$ より，$x=\dfrac{4}{a^2}$．

よって，$y=g(x)$ のグラフの増減は以下の通り．

x	0	$\cdots$	$\dfrac{4}{a^2}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	$2-\log\dfrac{4}{a^2}$	↗

任意の $x>0$ に対して，$g(x)>0$ が成り立つためには，$g\left(\dfrac{4}{a^2}\right)=2-\log\dfrac{4}{a^2}>0$ であればよい．したがって，

$$2>\log\frac{4}{a^2}$$

以下，式変形すると，$\log e^2>\log\dfrac{4}{a^2}$

$e^2>\dfrac{4}{a^2}$

$a^2>\dfrac{4}{e^2}$

$a^2-\dfrac{4}{e^2}>0$

$\left(a+\dfrac{2}{e}\right)\left(a-\dfrac{2}{e}\right)>0$

$a>0$ より，$a>\dfrac{2}{e}$

■

✎注　**解** 1 と **解** 2 を比較してみてどうでしょうか？どちらの方法もそれなりに得るところがある良い解法だと思います．甲乙付けがたいですね．よって，どちらの方法もできるようにマスターしておきましょう．

25　平均値の定理・速度

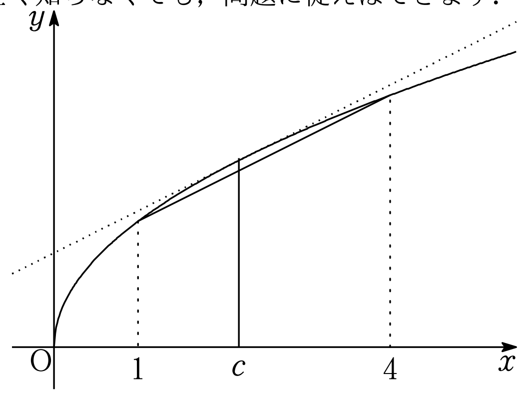
$\boxed{41}$ 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ について，$a=1,b=4$ のとき，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす c の値をもとめよ．

考え方　いわゆる『平均値の定理』の具体例．

A$(a,\ f(a))$，B$(b,\ f(b))$ とおくと，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ は直線 AB の傾きを表しています．

また，$f'(c)$ は $x=c$ における接線の傾きのことなので，直線 AB と平行な接線の接点 c が a と b の間に少なくとも 1 個はある，というのが『平均値の定理』の意味です．『平均値の定理』の詳しい解説は犬プリ見といてください．

しかしながら，この問題は『平均値の定理』など全く知らなくても，問題に従えばできます．



解　$a=1$，$b=4$ のとき，

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{1}}{4-1}=\dfrac{2}{3}$

$f'(c)=\dfrac{1}{2\sqrt{c}}$ なので，$\dfrac{1}{2\sqrt{c}}=\dfrac{2}{3}$．

よって，$c=\dfrac{9}{4}$．

■

42　動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における位置が $x=2t,\ y=-3t^2+5t$ で与えられているとき，$t=2$ での動点 P の速さを求めよ．

考え方　物理選択者にとってはなんでもない問題かな？いわゆる「速度」と「速さ」の違いですね．数学的に言えば，「速度」は「ベクトル」で，「速さ」は「スカラー」です．詳しくは下の **解** を見て，意味を理解しといてください．

解　速度ベクトルは
$\overrightarrow{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=(2,\ -6t+5).$
速さは，$|\overrightarrow{v}|=\sqrt{2^2+(-6t+5)^2}$
$=\sqrt{36t^2-60t+29}.$
よって，$t=2$ における速さは
$\sqrt{36\cdot 2^2-60\cdot 2+29}=\sqrt{53}$

■

43　$|x|$ が十分小さいとき，$\sqrt{1+x}$ の近似式を作れ．

考え方　ちょっと問題文が不十分．おそらく「1 次近似式を求めよ」ということなんでしょう．要するに曲線を直線で近似せよということで，分かりやすく言えば，「$y=\sqrt{1+x}$ をグラフを $x=0$ の近くでみるとどんな直線っぽく見えますか」ということです．

解　$y=\sqrt{1+x}$ のグラフの $x=0$ における接線の傾きは，$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ より，傾き $\dfrac{1}{2}$．したがって求める 1 次近似式は $x=0$ における接線そのものであるので，
$y=\dfrac{1}{2}(x-0)+1=\dfrac{1}{2}x+1$

■

参考　もう少し専門的にいえば「$\sqrt{1+x}$ をマクローリン展開したときの 1 次の項までを言え」ですね．詳しくは大学でよろしく．

26　演習問題 (5)

基本問題はありません．

27　不定積分

この程度の不定積分ができれば十分でしょう．

44
(1) $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x}\,dx$
(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$
(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$　$(a\neq 0)$
(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

考え方　(1)　分子の次数が分母の次数よりも高い場合は，(分子) ÷ (分母) を計算して，分子の次数を下げることがポイント．

(2) は部分分数に分けます．どのように分けるのか，なぜこのように分かれるのか，は聞かないでください．

(3)　ルートがらみはとりあえず有理化してみるのが鉄則．

(4)　(3) を真似て有理化しようと思うかもしれませんが，うまくいきません．チカンでもするしかありません．

解　(1)　$\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x}\,dx=\int\left(x^2+\frac{2}{x}\right)dx$
$=\dfrac{1}{3}x^3+2\log|x|+C$

■

(2)

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

と部分分数に分解できたとする．右辺を通分して

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{a(x-1)^2+bx(x-1)+cx}{x(x-1)^2}$$
$$=\frac{(a+b)x^2+(-2a-b+c)x+a}{x(x-1)^2}$$

x についての恒等式とみて係数を比較して，
$a+b=0,\ -2a-b+c=0,\ a=1$
したがって，$a=1,\ b=-1,\ c=1$ となり，

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

と分解できる．

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{x(x-1)^2}\\
&=\int \left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right\}dx\\
&=\log|x|-\log|x-1|-\frac{1}{x-1}+C
\end{aligned}
$$

■

✎注 $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx=\int (x-1)^{-2}\,dx$
$\displaystyle=\frac{1}{-2+1}(x-1)^{-2+1}+C=-\frac{1}{x-1}+C$

(3)

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}\\
&=\int \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})}\,dx\\
&=\int \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}{a}\,dx\\
&=\frac{1}{a}\int(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})\,dx\\
&=\frac{1}{a}\left(\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)+C\\
&=\frac{2}{3a}\left((x+a)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)+C
\end{aligned}
$$

■

✎注 $\displaystyle\int \sqrt{x+a}\,dx=\int (x+a)^{\frac{1}{2}}\,dx$
$\displaystyle=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x+a)^{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}+C$

(4) $\sqrt{x+1}=t$ とおくと，$x+1=t^2$ より
$x=t^2-1$．$dx=2t\,dt$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}&=\int \frac{2t\,dt}{(t^2-1)t}\\
&=\int \frac{2}{(t-1)(t+1)}\,dt\\
&=\int\left\{\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right\}dt\\
&=\log|t-1|-\log|t+1|+C\\
&=\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C\\
&=\log\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C
\end{aligned}
$$

■

45　(1) $\displaystyle\int \sin 2x\cos 3x\,dx$
(2) $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$
(3) $\displaystyle\int xe^{-ax}\,dx$
(4) $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx$

考え方　(1) 2倍角の公式や3倍角の公式を使ってバラしてもできなくはありませんが，メンドウです．ここは「積和公式」を使うべきでしょう．

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

すぐに思い出せない人は，自分で確実に作れるようにしておくこと．

(2) 一瞬どうしてよいか迷いますが，分母分子の形を良く見ると，$(e^x+e^{-x})'=e^x-e^{-x}$ つまり，(分子)＝(分母)$'$ という関係になっていることに気づきます．すると，次の公式が思い浮かぶはず．

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log|f(x)|+C$$

$f(x)=t$ と置換すれば，$f'(x)dx=dt$ なので，

$$
\begin{aligned}
\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int \frac{1}{t}\,dt&=\log|t|+C\\
&=\log|f(x)|+C
\end{aligned}
$$

これは必ず暗記しておこう．

(3) 典型的な部分積分です．

(4) 残念ながら，地道な次数下げ以外に方法はなさそうです．

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2},\quad \cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

を繰り返し利用します．

解　(1)

$$
\begin{aligned}
&\int \sin 2x\cos 3x\,dx\\
&=\int \frac{1}{2}\{\sin(2x+3x)+\sin(2x-3x)\}\\
&=\frac{1}{2}\int(\sin 5x+\sin(-x))\,dx\\
&=\frac{1}{2}\int(\sin 5x-\sin x)\,dx\\
&=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x+\cos x\right)+C\\
&=-\frac{1}{10}\cos 5x+\frac{1}{2}\cos x+C
\end{aligned}
$$

■

✎注　ちなみに2倍角，3倍角の公式でバラすと，
$\sin 2x\cos 3x$

$= 2\sin x\cos x(-3\cos x + 4\cos^3 x)$

となり，$\sin x$ が 1 個だけ余分にあるので，$\cos x = t$ と置換すればうまくいくことがわかります．

(2)

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int \frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}}\,dx$$
$$= \log|e^x + e^{-x}| + C$$
$$= \log(e^x + e^{-x}) + C$$

■

✏注 $e^x + e^{-x} = t$ と置換したわけです．

$(e^x - e^{-x})dx = dt$ なので，

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + C$$

となっているのです．なお，$e^x + e^{-x} > 0$ なので真数部分の絶対値は外しておきました．

(3)

$$\int xe^{-ax}\,dx$$
$$= \int x\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right)'\,dx$$
$$= x\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right) - \int x'\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right)\,dx$$
$$= x\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right) + \frac{1}{a}\int e^{-ax}\,dx$$
$$= x\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right) + \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right) + C$$
$$= x\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right) - \frac{1}{a^2}e^{-ax} + C$$
$$= -\frac{e^{-ax}}{a^2}(ax + 1) + C$$

■

(4)

$$\int \sin^4 x\,dx$$
$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right)\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2}\right)\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right) + C$$
$$= \frac{3}{8}x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$$

■

28　定積分

この程度の定積分ができれば十分でしょう．

$\boxed{46}$

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{8 + x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_1^{e} x^2(\log x - 1)\,dx$

考え方 (1)

$\cos^3 x = \cos^2 x\cos x = (1 - \sin^2 x)\cos x$ なので，何をチカンすればよいかわかりますよね．

(2) と (4) は 典型的な部分積分．定積分であることを忘れないように．

(3) 「$\dfrac{1}{1 + x^2}$ の積分は $x = \tan\theta$ と置換する」というのは常識です．今回の関数は $\dfrac{1}{8 + x^2}$ なので全く同じというわけではありませんが，似たようなものですね．どのように置換するのか．

解

(1) $\sin x = t$ とすると，$\cos x\,dx = dt$．

x	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	0	$\longrightarrow$	1

よって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)\cos x\,dx$$
$$= \int_0^1 (1 - t^2)\,dt$$
$$= \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

■

✏注　3 倍角の公式

$\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$ より，

$\cos^3 x = \dfrac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$ であることを利用すれば，置換積分などせずとも答えが出せます．い

わゆる，3 倍角の公式を利用した次数下げです．

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}\,dx\\ &= \frac{1}{4}\Big[\,\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}+3\right) = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

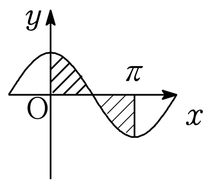
■

(2)

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi} x\sin x\,dx\\ =&\int_0^{\pi} x(-\cos x)'\,dx\\ =&\Big[\,x(-\cos x)\,\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x'(-\cos x)\,dx\\ =&\pi + \int_0^{\pi}\cos x\,dx\\ =&\pi + \Big[\,\sin x\,\Big]_0^{\pi} = \pi\end{aligned}$$

■

➾注 $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos x\,dx = 0$ であることは積分しなくてもグラフの形からわかりますよね．



(3)　$x = 2\sqrt{2}\tan\theta$ と置換すると，

$dx = \dfrac{2\sqrt{2}}{\cos^2\theta}\,d\theta.$

x	0	$\longrightarrow$	$2\sqrt{2}$
θ	0	$\longrightarrow$	$\dfrac{\pi}{4}$

よって，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{1}{8+x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{8+8\tan^2\theta}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\cos^2\theta}\,d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{8}\cos^2\theta\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\cos^2\theta}\,d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{4}\,d\theta\\ &= \Big[\,\frac{\sqrt{2}}{4}\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{16}\end{aligned}$$

■

(4)

$$\begin{aligned}&\int_1^{e} x^2(\log x - 1)\,dx\\ =&\int_1^{e}\left(\frac{x^3}{3}\right)'(\log x - 1)\,dx\\ =&\Big[\,\frac{x^3}{3}(\log x - 1)\,\Big]_1^{e} - \int_1^{e}\frac{x^3}{3}(\log x - 1)'\,dx\\ =&0 - \frac{1}{3}(-1) - \int_1^{e}\frac{x^2}{3}\,dx\\ =&\frac{1}{3} - \Big[\,\frac{x^3}{9}\,\Big]_1^{e}\\ =&\frac{1}{3} - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1}{9}\right) = \frac{4-e^3}{9}\end{aligned}$$

■

$\boxed{47}$ (1) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin x + \cos x|\,dx$

$\boxed{47}$ (2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2|\sin x|\,dx$

絶対値が付いているので一瞬ひるんでしまいますが，まずは絶対値をはずすために，積分区間において絶対値の内部の符号変化を調べる必要があります．

(1) は絶対値内の符号変化を調べるためには三角関数の合成が必要です．

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

なので，積分区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において，

$$\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| = \begin{cases}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}\pi\right)\\ -\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) & \left(\dfrac{3}{4}\pi \leqq x \leqq \pi\right)\end{cases}$$

なので，積分区間を分割して計算します．つまり，

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi} |\sin x + \cos x|\,dx\\ =&\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(\sin x + \cos x)\,dx + \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\{-(\sin x + \cos x)\}\,dx\\ =&\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(\sin x + \cos x)\,dx - \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}(\sin x + \cos x)\,dx\end{aligned}$$

なお，合成した関数を積分しても良いのですが，今回はこのまま積分します．

(2) は符号変化はとても簡単，

積分区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，

$$|\sin x| = \begin{cases}\sin x & (0 \leqq x \leqq \pi)\\ -\sin x & (\pi \leqq x \leqq 2\pi)\end{cases}$$

なので，これまた積分区間を分割して計算すればどうってことありません．つまり，

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} x^2|\sin x|\,dx\\=&\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi} x^2(-\sin x)\,dx\\=&\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi} x^2\sin x\,dx\end{aligned}$$

いずれにしても，$\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$ を計算する必要があるので，最初に不定積分だけ計算しておいたほうが良いでしょう．

解 (1)

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|\,dx\\=&\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(\sin x+\cos x)\,dx-\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}(\sin x+\cos x)\,dx\\=&\Big[-\cos x+\sin x\Big]_0^{\frac{3}{4}\pi}-\Big[-\cos x+\sin x\Big]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\\=&\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-(-1+0)\right\}-\left\{(1+0)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}\\=&\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&\int x^2\sin x\,dx\\=&\int x^2(-\cos x)'\,dx\\=&-x^2\cos x+\int 2x\cos x\,dx\\=&-x^2\cos x+\int 2x(\sin x)'\,dx\\=&-x^2\cos x+2x\sin x-\int 2\sin x\,dx\\=&-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} x^2|\sin x|\,dx\\=&\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi} x^2(-\sin x)\,dx\\=&\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi} x^2\sin x\,dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx\\=&\Big[-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x\Big]_0^{\pi}\\=&(\pi^2-2)-2\\=&\pi^2-4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_{\pi}^{2\pi} x^2\sin x\,dx\\=&\Big[-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}\\=&(-4\pi^2+2)-(\pi^2-2)\\=&-5\pi^2+4\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} x^2|\sin x|\,dx\\=&(\pi^2-4)-(-5\pi^2+4)\\=&6\pi^2-8\end{aligned}$$

■