オリスタ基本問題を全問解説しましょう

（第1章〜第15章まで）

1　複素数平面 (1)

$\boxed{1}$　点 $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ を中心として，点 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ を時計回りに $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転させたときの点を表す複素数 γ を求めよ.

考え方　α を β を中心として時計回りに θ だけ回転させてできる複素数 γ は

$$\gamma=(\alpha-\beta)(\cos\theta+i\sin\theta)+\beta$$

で表されます．この公式はそのまま丸暗記するのではなく，意味を考えて覚えよう.

操作の流れ

① まずは回転の中心 β が原点になるように α を平行移動する.

$\longrightarrow\ -\beta$

② 原点中心に θ 回転する.

$\longrightarrow\ \times(\cos\theta+i\sin\theta)$

③ 再び β 平行移動して，もとの場所に戻す.

$\longrightarrow\ +\beta$

この一連の操作に基づき，上の公式が得られます.

注　複素数 $\cos\theta+i\sin\theta$ は原点周りの回転を表しているので，本問のように回転の中心が原点でない場合は，まずは原点に平行移動してから回転して，再びもとの場所に戻す」ことが基本となります.

解　$\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\beta=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\theta=\frac{3}{4}\pi$ とおいて，上の公式に当てはめるだけなので省略.

■

$\boxed{2}$　複素数 z_1，z_2，z_3 について，
$z_1+iz_2=(1+i)z_3$ が成り立っている.

(1)　$\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}$ の絶対値と偏角を求めよ.

(2)　3点 $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ はどのような三角形であるか.

考え方　(1) について．たいてい上手く変形できるようになっているので，結果をにらみながら式を近づけていきます．まあ，i のある部分と，ない部分でまとめるのがフツーでしょう．(2) は (1) の結果をどのように解釈するのかがポイント．なお，教科書にも類題が載っているので自分で探して勉強しておこう.

解　(1)　$z_1+iz_2=(1+i)z_3$ より，

$z_1+iz_2=z_3+iz_3$，$i(z_2-z_3)=-(z_1-z_3)$

$\therefore\ \frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}=-\frac{1}{i}=i$　（分母の有理化！）

$i=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ なので，絶対値は1で偏角は $\frac{\pi}{2}$

(2)　(1) の結果より，

$$z_2-z_3=(z_1-z_3)\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\quad\cdots(※)$$

この式は，複素数 z_1 を z_3 を中心に $\frac{\pi}{2}$ 回転させると z_2 になることを意味している．つまり，$\triangle\mathrm{ABC}$ は $\angle\mathrm{C}=\frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形である.

■

注（※）の式が $\boxed{1}$ の公式そのものであることを意識しよう.

2　複素数平面 (2)

$\boxed{3}$　次の式を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ の軌跡を求めよ.

(1)　$|z-1|=|z-i|$

(2)　$|z-3|=1$

(3)　$|z+2-i|\leqq 2$

(4)　$|z+2|=2|z-1|$

考え方　式の意味を考えよう．ベクトル方程式と同じ発想です．(1)(2)(3) は，いきなりゴチャゴチャ計算し始める人もいますが，計算など一切不要．式を見て，意味を解釈すれば答えがわかります．(4) はアポロニウスの円です．個人的には (4) も計算不要で答えを出したいところですが，いちおうきちんと式変形してみます．この計算方法はとても重要.

解　(1)(2)(3) は省略．特に問題ないでしょう．

(4) 両辺を 2 乗すると

$|z+2|^2=4|z-1|^2$

$(z+2)(\overline{z+2})=4(z-1)(\overline{z-1})$

$(z+2)(\overline{z}+2)=4(z-1)(\overline{z}-1)$

$z\overline{z}+2z+2\overline{z}+4=4(z\overline{z}-z-\overline{z}+1)$

$z\overline{z}+2z+2\overline{z}+4=4z\overline{z}-4z-4\overline{z}+4$

$z\overline{z}-2z-2\overline{z}=0$

$(z-2)(\overline{z}-2)=4$

$(z+2)(\overline{z-2})=4$

$|z-2|^2=4$

$|z-2|=2$

$\therefore$ 点 2 中心，半径 2 の円である．

■

注　アポロニウスの円の定理に従えば，点 -2 と点 1 を 2 : 1 に内分する点と外分する点を直径の両端とする円になります．計算結果と一致していることを確認しておくこと．

注　複素平面の考え方にどうしても馴染めない人は xy 平面に変換して考えることもできます．例えば，(4) の場合，$z=x+iy$ とすれば，

$$\begin{aligned}&|z+2|=2|z-1|\\ \Longleftrightarrow\ &|x+2+iy|=2|x-1+iy|\\ \Longleftrightarrow\ &\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}\end{aligned}$$

なので，$(x+2)^2+y^2=4(x-1)^2+4y^2$．この式を変形すると，$(x-2)^2+y^2=4$ となり，点 $(2,\ 0)$ 中心の半径 2 の円であることが分かります．

(1)〜(3) もこの方法でやってみてください．

> $\boxed{4}$　$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+1\leqq 0$ を満たす複素数 z が存在するような複素数 α の範囲を図示せよ．

考え方　z が存在するための α の条件を求めます．まずは z の存在範囲のイメージですね．

解　$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+1\leqq 0$

$(z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha})-\alpha\overline{\alpha}+1\leqq 0$

$(z+\alpha)(\overline{z+\alpha})\leqq\alpha\overline{\alpha}-1$

$|z+\alpha|^2\leqq|\alpha|^2-1$

ここで，$|z+\alpha|^2\geqq 0$ なので，$|\alpha|^2-1\geqq 0$ であることが必要．

このとき，$|z+\alpha|\leqq\sqrt{|\alpha|^2-1}$ であり，z は，点 $-\alpha$ 中心，半径 $\sqrt{|\alpha|^2-1}$ の円の内部に確かに存在する．

よって，求める α の条件は，$|\alpha|^2-1\geqq 0$．すなわち，$|\alpha|\geqq 1$．(図は省略)

■

3　2 次曲線

> $\boxed{5}$
>
> (1) 楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ と焦点を共有し，点 $(\sqrt{15},\ 2)$ を通る楕円の方程式を求めよ．
>
> (2) 漸近線の方程式が $py=x$，焦点の座標が $(5\sqrt{2},\ 0)$，$(-5\sqrt{2},\ 0)$ であり，かつ点 $(p,\ 0)$ を通る双曲線の方程式と，p の値を求めよ．

考え方　特に問題ないでしょう．悩むとすれば計算方法だけかな．

解　(1) 求める楕円の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とすれば，焦点の座標が楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ の焦点と一致するので，$a^2-b^2=16-12=4$．

また，点 $(\sqrt{15},\ 2)$ を通るので，$\dfrac{15}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1$．

これらを a^2 と b^2 に関する連立方程式と見て $a^2=20$，$b^2=16$ を得る．

よって求める楕円の方程式は $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{16}=1$．

(2)　焦点の座標が $(\pm 5\sqrt{2},\ 0)$ なので，求める双曲線の方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とおくことができる．このとき，$\sqrt{a^2+b^2}=5\sqrt{2}$，つまり $a^2+b^2=50$．

漸近線は $\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$ で，これが $py=x$ 一致するので $p=\pm\dfrac{a}{b}$，つまり，$p^2=\dfrac{a^2}{b^2}$．

さらに点 $(p,\ 0)$ を通るので $\dfrac{p^2}{a^2}=1$ つまり，$a^2=p^2$．したがって，$b^2=1$．

以上より，$p^2+1=50$ となり $p=\pm 7$．

■

注　(1)(2) ともに a^2 と b^2 をひとまとめに考えていることに注意しよう．

$\boxed{6}$ 放物線 $x=y^2-y+1$ の頂点と焦点の座標，および準線の方程式を求めよ．

$\boxed{考え方}$ これも特に問題ないでしょう．平方完成します．焦点も準線も平行移動します．

解 $x=\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$．頂点は $\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$．

つまり，放物線 $x=y^2$ を y 軸方向に $+\dfrac{1}{2}$，x 軸方向に $+\dfrac{3}{4}$ だけ平行移動したものである．

放物線 $x=y^2$ の焦点は $\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$，

準線は $x=-\dfrac{1}{4}$ なので，これらも同じように平行移動すると，放物線 $x=y^2-y+1$ の焦点は $\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4},\ 0+\dfrac{1}{2}\right)=\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$，

準線は $x=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}$ となる．

■

4 媒介変数表示

$\boxed{7}$ 次の式で表される点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，どんな曲線を描くか．

(1) $x=t+\dfrac{1}{t}$，$y=t^2+\dfrac{1}{t^2}$

(2) $\begin{cases} x=1+\cos\theta \\ y=\sin\theta-2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=\dfrac{3}{\cos\theta} \\ y=2\tan\theta \end{cases}$

$\boxed{考え方}$ 軌跡の問題です．セオリー通り，媒介変数を消去して x と y だけの式にしますが，三角関数がらみの場合，相互関係式（$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ など）はいつでも使えるようにしておこう．なお，軌跡の限界（x や y の範囲）を忘れないように．

解 (1) $y=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2-2=x^2-2$．

$t^2>0$ より相加相乗平均の大小関係から，$y=t^2+\dfrac{1}{t^2}\geqq 2\sqrt{t^2\times\dfrac{1}{t^2}}=2$．

よって，求める軌跡は $y=x^2-2$ $(y\geqq 2)$

(2) $\cos\theta=x-1$，$\sin\theta=y+2$ を，三角関数の相互関係式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すればよい．

$\therefore\ (x-1)^2+(y+2)^3=1$．

(3) $\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{x}{3}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{2}$ を，三角関数の相互関係式 $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入すればよい．

$\therefore\ 1+\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{x^2}{9}$．つまり，$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$

■

$\boxed{8}$ $a>0$，$b>0$ とする．次の媒介変数表示

$$x=\frac{a(1-t^2)}{1+t^2},\qquad y=\frac{2bt}{1+t^2}$$

で表される曲線を C とする．

(1) $t=\tan\theta$ とおいて，x，y を，θ を用いて表せ．

(2) $a=3$，$b=2$ のとき，C の概形をかけ．

$\boxed{考え方}$ そのまま代入すると，$\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ や $\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ が登場しますが，このままではダメでさらに変形し簡単にする必要があります．三角関数の知識が要求されますね．

解 (1) $x=\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2}=\dfrac{a(1-\tan^2\theta)}{1+\tan^2\theta}$
$=a(1-\tan^2\theta)\cos^2\theta=a(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$
$=a\cos 2\theta$
$y=\dfrac{2bt}{1+t^2}=\dfrac{2b\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=2b\tan\theta\cos^2\theta$
$=2b\sin\theta\cos\theta=b\sin 2\theta$

(2) (1) より，$t=\tan\theta$ のとき，$x=3\cos 2\theta$，$y=2\sin 2\theta$ となるが，$\theta\neq\dfrac{\pi}{2}$ なので，$2\theta\neq\pi$．つまり，点 $(-3,\ 0)$ は表すことができない．

このとき，$\cos\theta=\dfrac{x}{3}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{2}$ なので，$\left(\dfrac{x}{3}\right)^2+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2=1$．つまり，$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$．

以上より，求める C の軌跡は，$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$．ただし点 $(-3,\ 0)$ は除く．（図は省略）

■

5 極座標と極方程式

$\boxed{9}$ 極方程式 $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sin\theta}$ が表す図形を直交座標 $(x,\ y)$ に図示せよ．

考え方　直交座標と極座標の間の関係式は

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$$

です．**これらの関係式をうまく組み合わせて r と θ を消去し，x と y だけの関係式を作れというだけです**．なお，この問題では $-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ なので，必ず $r>0$ であることがわかります．このこともポイント．図はオリスタの解答を見てください．

解　$r = \dfrac{1}{\sqrt{2}-\sin\theta}$ を変形して，

$r\sqrt{2} - r\sin\theta = 1$．$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ なので，

$r>0$ だから $r = \sqrt{x^2+y^2}$，また，$r\sin\theta = y$ を代入して，$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2} - y = 1$．

$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2} = y+1$

$2(x^2+y^2) = (y+1)^2$

$2x^2+y^2-2y-2=0$

■

$\boxed{10}$　2 直線 $r\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) = 3$，$r\sin\theta = 3$ の交点 A と点 $\mathrm{B}\left(2,\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$ を通る直線の極方程式を求めよ．

考え方

極方程式で表された図形を考えるときは

方法 ①　直交座標に変換して考える

方法 ②　極座標のままで解釈する

の 2 通りありますが，先ほどの例で分かるように，**一見ややこしそうな極座標や極方程式も，直交座標に変換すれば，お馴染みの形になる**ので，そんなに身構える必要はありません．よって，極座標や極方程式にストレスを感じる人は，とにかく，

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$$

の関係式をうまく組み合わせて，直交座標に直して考えればよいのです．

したがって，この問題でもまずは直交座標に直します．でも，問題が「極方程式を求めよ」となっているので，出てきた直交座標の結果を極方程式に戻す必要があります．

解　直交座標に変換して考える．

$$\begin{aligned}
&r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 3\\
\iff& r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{6} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{6}\right) = 3\\
\iff& \frac{\sqrt{3}}{2}r\cos\theta + \frac{1}{2}r\sin\theta = 3\\
\iff& \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 3\\
\iff& y = -\sqrt{3}x + 6
\end{aligned}$$

$$r\sin\theta = 3 \iff y = 3$$

よって，2 直線は

$$\begin{cases} y = -\sqrt{3}x + 6\\ y = 3\end{cases}$$

これらの交点は $(\sqrt{3},\ 3)$ である．また，

$$\text{極座標 } B\left(2,\ \frac{5}{6}\pi\right) \iff \text{直交座標 } B(-\sqrt{3},\ 1)$$

なので，結局，2 点 $(\sqrt{3},\ 3)$ と $(-\sqrt{3},\ 1)$ を通る直線を求めればよい．

この直線は，$y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + 2$ である．

この式を極方程式に直すと，

$$\begin{aligned}
&y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2\\
\iff& r\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}r\cos\theta + 2\\
\iff& r(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta) = -2\sqrt{3}\\
\iff& r\left(\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) = -\sqrt{3}\\
\iff& r\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}
\end{aligned}$$

■

✎**注**　極座標 $\mathrm{B}\left(2,\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$ を直交座標に直すのは問題ないと思いますが念のため．

$x = r\cos\theta = 2\cos\dfrac{5}{6}\pi = -\sqrt{3}$

$y = r\sin\theta = 2\sin\dfrac{5}{6}\pi = 1$

よって，直交座標では $(-\sqrt{3},\ 1)$ になります．

✎**注**　すでに気づいていると思いますが，最後の部分は三角関数の合成をしています．

✎**注**　念のため，方法 ② の極座標のままで解釈しようと努力しましたが，あまりにもメンドウで挫折しました．僕には無理です．

6　分数関数・無理関数

11　曲線 $y=\dfrac{4x+1}{2x-1}$ のグラフをかけ．（問題文を改題しました）

考え方　特に問題ないでしょう．

解　$y=\dfrac{4x+1}{2x-1}=\dfrac{2(2x-1)+3}{2x-1}$

$=2+\dfrac{3}{2x-1}=2+\dfrac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}$

したがって，$y=\dfrac{\frac{3}{2}}{x}$ のグラフを x 軸方向に $+\dfrac{1}{2}$，y 軸方向に $+2$ 平行移動したものであり，漸近線は $x=\dfrac{1}{2}$ と $y=2$ である．

■

12　$y=\sqrt{2x-3}+1$ のグラフと直線 $y=mx+2$ が共有点をもつような実数 m の値の範囲を求めよ．

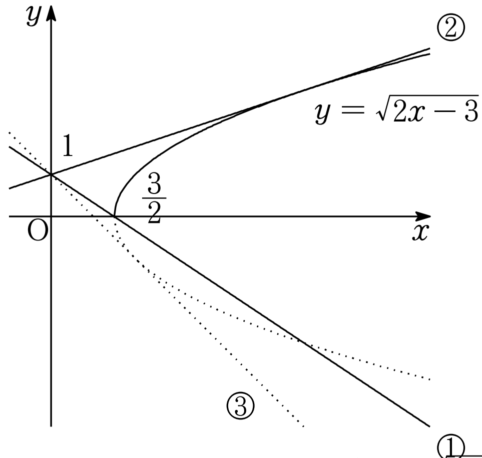
考え方　$y=\sqrt{2x-3}+1$ と $y=mx+2$ の共有点の x 座標は，方程式 $\sqrt{2x-3}+1=mx+2$，つまり，$\sqrt{2x-3}=mx+1$ の解として得られます．つまり，この方程式が実数解をもつような m の範囲を求めることになりますが，勝手に２乗して式変形してはいけません．

$$2x-3=(mx+1)^2 \underset{\bigcirc}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} \sqrt{2x-3}=mx+1$$

だから，**両辺を２乗した式 $2x-3=(mx+1)^2$ が解をもつ条件と，元の式 $\sqrt{2x-3}=mx+1$ が解をもつ条件とは異なる**からです．

したがって，$\sqrt{2x-3}=mx+1$ が解をもつ条件を調べるため，まずは２つのグラフ $y=\sqrt{2x-3}$ と $y=mx+1$ を図示して，２つのグラフが交わるような m を調べよう．

注　$y=\sqrt{2x-3}=\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}$ なので，$y=\sqrt{2x-3}$ のグラフは，$y=\sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{3}{2}$ 平行移動したものになります．また，$y=mx+1$ のグラフは y 切片が１で一定，傾き m の直線を表しています．



上の図から，$y=mx+1$ が $y=\sqrt{2x-3}$ と交わるためには，$y=mx+1$ が点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を通るとき（図の ① 部）と，$y=mx+1$ が $y=\sqrt{2x-3}$ と接するとき（図の ② 部）の間に存在すればよいことがわかります．

解　$y=mx+1$ が点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を通るとき（図の ① 部）の m は，$\dfrac{3}{2}m+1=0$ より，$m=-\dfrac{2}{3}$．

$y=\sqrt{2x-3}$ と $y=mx+1$ が接するとき（図の ② 部）の m は $\sqrt{2x-3}=mx+1$ の両辺を２乗して，$2x-3=(mx+1)^2$．展開して整理すると，$m^2x^2+2(m-1)x+4=0$．

したがって，判別式 $D=0$ より，

$(m-1)^2-4m^2=0$．$\therefore\ m=-1,\ \dfrac{1}{3}$．

図より $m>0$ だから，$m=\dfrac{1}{3}$．

よって，$y=\sqrt{2x-3}$ と $y=mx+1$ が交わるような m の範囲は $-\dfrac{2}{3}\leqq m\leqq\dfrac{1}{3}$

■

注　２乗した式を変形してでてきた x の２次方程式 $m^2x^2+2(m-1)x+4=0$ の判別式 D が $D\geqq 0$ であればよい，と考えた人が多いと思います．この場合，m の範囲は $-1\leqq m\leqq\dfrac{1}{3}$ になるのですが，これだと図の下側の曲線（点線部）との関係（図の ③ 部）を考えたことになり正しくありません

7　関数の性質

13　２つの関数 $f(x)=x+2$，$g(x)=x^2$ に対し，$(f\circ h)(x)=g(x)$ を満たす x の２次関数 $h(x)$ を求めよ．

考え方 合成関数の記号の意味さえ間違えなければ特に問題ないでしょう．

解 $(f\circ h)(x)=f(h(x))=h(x)+2$．これが $g(x)$ に等しいので，$h(x)+2=x^2$．$h(x)=x^2-2$．

■

---

14 関数 $f(x)=\dfrac{3x}{x+1}$, $g(x)=2x-1$ について, 逆関数 $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$, $(f\circ g)^{-1}(x)$ を求めよ．

考え方 逆関数の記号の意味さえ間違えなければ特に問題ないでしょう．特に，$(f\circ g)^{-1}(x)$ は，合成関数 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ の逆関数を表しています．つまり，

$$\begin{aligned}y=f(g(x))&\iff f^{-1}(y)=g(x)\\&\iff g^{-1}(f^{-1}(y))=x\end{aligned}$$

「g で変換してから f で変換する」の逆をたどるので「f^{-1} で変換してから g^{-1} で変換する」ということですね。

解 $y=\dfrac{3x}{x+1}$ において x と y を入れ換えて，$x=\dfrac{3y}{y+1}$．この式を変形して $y=-\dfrac{x}{x-3}$．

$\therefore\ f^{-1}(x)=-\dfrac{x}{x-3}$

$y=2x-1$ において x と y を入れ換えて，$x=2y-1$．この式を変形して $y=\dfrac{x+1}{2}$．

$\therefore\ g^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{2}$

$$(f\circ g)^{-1}(x)=g^{-1}(f^{-1}(x))=\frac{f^{-1}(x)+1}{2}$$
$$=\frac{-\dfrac{x}{x-3}+1}{2}=\frac{-3}{2(x-3)}.$$

■

注 $(f\circ g)^{-1}(x)$ について．よく分からない人は，先に $(f\circ g)(x)$ を求めてから，その逆関数を考えても良いでしょう．つまり，

$y=(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{3g(x)}{g(x)+1}=\dfrac{6x-3}{2x}$ より, x と y を入れ換えて, $x=\dfrac{6y-3}{2y}$．この式を変形して，$y=\dfrac{-3}{2(x-3)}$．

8　演習問題 (1)

基本問題はありません．

9　数列の極限

極限値計算では，$\dfrac{\infty}{\infty}$ と $\infty-\infty$ がヤバイのでこのヤバさをいかにして解消するかがポイントとなります．解消方法として以下の 3 方法が基本となります．

▷Point◁

$\dfrac{\infty}{\infty}$ と $\infty-\infty$ の解消方法

- 分母分子を何かで割る
- 何かでくくりだす
- 必要に応じて 分母分子の有理化をする

---

15 (1) $a_n=2n^2+n$ である数列の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}$

考え方 まずは S_n を求めよう．

$\dfrac{\infty}{\infty}$ タイプの極限値計算では，分母分子を何かで割ることが基本です．

解

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}(2k^2+k)\\&=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{n(n+1)}{6}\{2(2n+1)+3\}\\&=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(4n+5)}{6n^3}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{5}{n}\right)\\&=\frac{1}{6}\cdot1\cdot4=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

■

注 S_n は展開せずに因数分解した形のまま極限値計算しましたが，展開してもかまいません．

参考 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(k\text{ 次式})}{(l\text{ 次式})}$ タイプの極限は次のようになります．

$k=l$ のとき，$\dfrac{k\text{ 次の係数}}{l\text{ 次の係数}}$ に収束
$k>l$ のとき，$+\infty$ または $-\infty$ に発散
$k<l$ のとき，0 に収束

今回の場合，S_n が 3 次式なので $\dfrac{S_n}{n^3}$ の極限が S_n の 3 次の係数 $\left(\text{つまり，}\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}\right)$ になるのは当然のことです．

$\boxed{15}$ (2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

考え方　分母と分子がそれぞれ $\infty-\infty$ タイプなので，**それぞれを有理化する必要があります．**どちらから先に有理化しても構いません．

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+3})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3})}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+5)-(n+3)}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3})}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3})}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3})}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\{(n+1)-n\}(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3})}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}\right)}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}=\frac{2(1+1)}{1+1}=2
\end{aligned}$$

■

注　分子の有理化が終わった後 (上式 4 行目)，分母を展開して計算しようとする人がいますが，**それではうまくいきません．**むしろ事態は悪くなる一方です．

ルートがあるから有理化するのではありません．$\infty-\infty$ は極限値の計算ができないので，それを解消するために有理化するのです．展開してしまうと，$\infty-\infty$ の形がどんどん出てきてしまうので，より困難な状況になるというわけです．**展開せずに，さらに分母を有理化して，分母分子ともに $\infty+\infty$ の形にすることが目標です．**そうすれば $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形になり，「**分母分子を何かで割る**」という手法につながっていくのです．

$\boxed{16}$
(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{7+5^{2n}}{9^n}$
(2) $a\neq-1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-1}{a^n+1}$

考え方　この問題では次のことが重要になります．

r^n の極限 (重要)

$r>1$	のとき	∞ に発散
$r=1$	のとき	1 に収束
$0<r<1$	のとき	0 に収束
$r=0$	のとき	0 に収束
$-1<r<0$	のとき	0 に収束
$r=-1$	のとき	$+1$ と -1 で振動
$r<-1$	のとき	$+\infty$ と $-\infty$ で振動

証明は省略しますが (ていうか難しすぎる)，$r=2$ とか $r=\dfrac{1}{2}$ とか具体的な数でイメージできれば十分です．

注　教科書等では、同じ結果をまとめて

$|r|<1$ のとき，収束
$r\leqq-1$ のとき，振動

としていますが．僕は上のように**細かく分類して考えるべきやと思っています．**

なぜなら，例えば，同じ 0 に収束するにしても，

$$-1<r<0,\quad r=0,\quad 0<r<1$$

とでは 0 への近づき方が異なるからです．

振動の場合も同様で，「$+1$ と -1 の振動」と「$+\infty$ と $-\infty$ の振動」とではずいぶん様子が異なります．

実際によくおこるミスとして，$\dfrac{1}{r^n}$ の極限があります．

$r=-1$ のとき，$\dfrac{1}{r^n}$ は振動
$r<-1$ のとき，$\dfrac{1}{r^n}$ は 0 に収束

「$r<-1$ のとき r^n は振動するのに，なぜ $\dfrac{1}{r^n}$ は収束するのですか」という質問を受けますが，**$r<-1$ のとき r^n が「$+\infty$ と $-\infty$ の振動」だか**

ら，その逆数 $\dfrac{1}{r^n}$ が 0 に収束するのは当然なのです．$r=-1$ と $r<-1$ の場合をしっかりと区別しよう．

(1) の場合，$5^{2n}=25^n \longrightarrow \infty$，$9^n \longrightarrow \infty$ なので，

$$\frac{7+25^n}{9^n} \longrightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

です．ということは「分母分子を何かで割る」という方針になりますが，この場合，分母が 9^n だけなのでそうするまでもなく結果が得られます．

(2) は，a^n の極限の様子が a によってどのように変化するのかを考えながら場合分けしていきます．

解 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{7+5^{2n}}{9^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{7}{9^n}+\left(\frac{25}{9}\right)^n\right\}$

$\dfrac{25}{9}>1$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{25}{9}\right)^n=\infty$.

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{7}{9^n}=0$ だから， 求める極限値は ∞.

(2)

$a>1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a^n=\infty$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-1}{a^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{a^n}}{1+\frac{1}{a^n}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

$a=1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a^n=1$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-1}{a^n+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

$-1<a<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a^n=0$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-1}{a^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$a<-1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-1}{a^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{a^n}}{1+\frac{1}{a^n}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

■

10　無限級数

$\boxed{17}$ 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ の和を求めよ．

考え方 「無限級数の和」の定義は大丈夫でしょうか？

▷Point◁

「無限級数の和」とは，第 n 項までの部分和 S_n の極限値のこと．

S_n が収束する場合にかぎり無限級数に和が存在する．

S_n が収束しない場合は無限級数に和が存在しない．

本問の場合，最初から「和を求めよ」と指示されているので，和が存在することは保証されてるんですが，念のため存在することを確認しておこう．

まずは部分和 S_n を求めます (これは数列の問題)．分数型の数列の和の求め方は覚えていますか？ **部分分数に分けて縦書きすること**．これは基本中の基本です．

解 部分和 $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$ を計算する．

$\dfrac{1}{k(k+2)}=\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)\times\dfrac{1}{2}$ より，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\times\frac{1}{2}\\&=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\times\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

したがって，部分和 S_n が収束するので，もとの無限級数も収束し，その和は $\dfrac{3}{4}$ である．

■

注 縦書きすると次のようになります．

$$\begin{array}{lcrl}
\left(\frac{1}{1}\right. & - & \left.\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{2} & (k=1)\\
\left(\frac{1}{2}\right. & - & \left.\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{2} & (k=2)\\
\left(\frac{1}{3}\right. & - & \left.\frac{1}{5}\right)\times\frac{1}{2} & (k=3)\\
\left(\frac{1}{4}\right. & - & \left.\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{2} & (k=4)\\
 & \cdots & & \cdots\\
 & \cdots & & \cdots\\
\left(\frac{1}{n-2}\right. & - & \left.\frac{1}{n}\right)\times\frac{1}{2} & (k=n-2)\\
\left(\frac{1}{n-1}\right. & - & \left.\frac{1}{n+1}\right)\times\frac{1}{2} & (k=n-1)\\
\left(\frac{1}{n}\right. & - & \left.\frac{1}{n+2}\right)\times\frac{1}{2} & (k=n)
\end{array}$$

$\boxed{18}$ (1)　$x \neq 0$ とする．次の無限級数が収束するための x の値の範囲を求めよ．

$$2-x+\frac{(2-x)^2}{x}+\frac{(2-x)^3}{x^2}+\cdots\cdots$$

$\boxed{\text{考え方}}$ 無限等比級数とは，無限等比数列の和のこと．初項 a，公比 r の無限等比数列の無限和がどのようになるのか考えよう．無限級数の和の定義にしたがって，部分和 S_n の極限を調べます．

$$S_n = a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots\cdots+ar^{n-1}$$

いうまでもなく，$\lim_{n\to\infty} S_n$ **が収束すればその値が無限等比級数の和であり，収束しなければ無限等比級数には和が存在しません．**

(i) $\boxed{a=0 \text{ のとき}}$，$S_n=0$ なので，もとの無限等比級数の和は存在し，その値は 0 である．

(ii) $\boxed{a \neq 0 \text{ のとき}}$，

（ア）$\underline{r=1 \text{ のとき}}$，$S_n = na$.

$\therefore$ $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty (a>0$ のとき$)$ または $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty (a<0$ のとき$)$．いずれにしても発散するので，無限等比級数に和は存在しない．

（イ）$\underline{r \neq 1 \text{ のとき}}$，$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ なので，S_n の収束，発散は r^n の収束，発散の様子で決まる．

$\underline{r>1 \text{ のとき}}$，$r^n \longrightarrow \infty$ だから，$S_n \longrightarrow \infty$．よって，和は存在しない．

$\underline{-1<r<1 \text{ のとき}}$，$r^n \longrightarrow 0$ だから，$S_n \longrightarrow \dfrac{a}{1-r}$．よって，もとの無限等比級数に和が存在し，その値は $\dfrac{a}{1-r}$ である．

$\underline{r \leqq -1 \text{ のとき}}$，$r^n$ は振動するので極値が存在せず，したがって S_n も収束しない．よって，和は存在しない．

以上をまとめると次のようになります．この a と r による場合分けは非常に重要です．

▷Point◁

初項 a，公比 r の無限等比級数の和は，

(i) $a=0$ のとき，和は 0.

(ii) $a \neq 0$ のとき，

$r \geqq 1$	のとき	和はない
$-1<r<1$	のとき	$\dfrac{a}{1-r}$
$r \leqq -1$	のとき	和はない

✎注　$a=0$ のときは r が何であっても和は 0 です．また，$a \neq 0$ のときは和があるとすれば，その和は $\dfrac{a}{1-r}$ ですが，この式に $a=0$ を代入すると 0 になるので，結局，a が 0 であろうとなかろうと，和は $\dfrac{a}{1-r}$ であると言えます．このことから，単に「**初項 a，公比 r の無限等比級数の和は** $\dfrac{a}{1-r}$」と言ったりします．

先ほど，初項 a，公比 r の無限等比級数の極限をまとめましたが，その中から収束する部分だけを取り出してみよう．

▷Point◁(無限等比級数の収束条件)

初項 a，公比 r の無限等比級数が収束する

$\Longleftrightarrow a=0$，または，$-1<r<1$

✎注　「無限等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ の極限」と「無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ の極限」をしっかりと区別しよう．

「無限等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ の極限」とは，一般項 $a_n = ar^{n-1}$ の極限のこと．

「無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ の極限」とは，部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$ の極限のこと．

したがって，収束条件も微妙に違ってきます．

▷Point◁(無限等比数列の収束条件)

初項 a，公比 r の無限等比数列が収束する

$\Longleftrightarrow a=0$，または，$-1<r \leqq 1$

✎注　無限等比級数の収束条件では $r=1$ を含んでいないのに，無限等比数列の収束条件には $r=1$ を含んでいることに注意しよう．暗記ではなく意味を考えれば納得いくはず．

つまり，「$r=1$ のとき，**無限等比数列の各項は a で一定なので，項自体は a に収束**している．しか

し，無限等比級数の場合は**各項 a を無限に足していくのだから，発散してしまう**」というわけ．当然ですよね．

解　この無限級数は初項が $2-x$, 公比が $\dfrac{2-x}{x}$ の無限等比級数である．したがって，収束するための条件は，

$$2-x=0,\ \text{または},\ -1<\frac{2-x}{x}<1$$

ここで, $2-x=0$ という条件は $-1<\dfrac{2-x}{x}<1$ という条件に含まれるので，結局，

$$-1<\frac{2-x}{x}<1$$

という条件だけを考えればよい．

$x>0$ のとき，

$$-x<2-x<x \iff \begin{cases}-x<2-x\\ 2-x<x\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}0<2\\ 1<x\end{cases}$$
$$\therefore\quad x>1$$

$x<0$ のとき，

$$-x>2-x>x \iff \begin{cases}-x>2-x\\ 2-x>x\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}0>2\\ 1>x\end{cases}$$

$\therefore$　これ連立不等式を満たす x は存在しない．

よって，以上より，$x>1$

■

> 18 (2)　ある無限等比級数の和は 6 で，その級数の各項の平方を項とする無限等比級数の和は 12 である．もとの級数の初項と公比をもとめよ．

考え方　とりあえず，もとの無限等比級数の初項を a，公比を r とおくと，各項の平方を項とする無限等比級数の初項と公比はどうなるでしょうか．こんな場合は**具体的に書き出して考える**に限ります．

$$a,\quad ar,\quad ar^2,\quad ar^3,\quad \cdots\cdots$$

各項を平方すると

$$a^2,\quad a^2r^2,\quad a^2r^4,\quad a^2r^6,\quad \cdots\cdots$$

したがって，初項 a^2，公比 r^2 の無限等比級数になっていることがわかります．

解　もとの無限等比級数の初項を a，公比を r とおくと，和が 6 であるので，$-1<r<1$ であり，

$$\frac{a}{1-r}=6\ \cdots①$$

この無限等比級数の各項の平方を項とする無限等比級数の初項は a^2，公比は $r^2(0\leqq r^2<1)$ なので，和が 12 であることより，

$$\frac{a^2}{1-r^2}=12\ \cdots②$$

① より，$a=6(1-r)$.
② より，$a^2=12(1-r^2)$
よって，$36(1-r)^2=12(1-r^2)$.
$3(1-r)^2=(1+r)(1-r)$.
$\therefore\quad r=\dfrac{1}{2}$. よって，$a=3$.

■

注　上の解答では a を消去して r だけの式にしてから，因数分解をうまく利用して計算しています．ちょっとしたことですがこのような機転と工夫は大切なことです．

11　漸化式と数列 (1)

> 19　$a_1=1$，$4a_{n+1}-3a_n-2=0$ のとき
> (1)　一般項 a_n を求めよ．
> (2)　$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ を求めよ．
> (3)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}$ を求めよ．

考え方　特に問題ないでしょう．

解　(1)　$4a_{n+1}-3a_n-2=$ より，

$$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{2}$$
$$a_{n+1}-2=\frac{3}{4}(a_n-2)$$
$$a_n-2=(a_1-2)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$
$$a_n=2-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

(2)　$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(2-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1}\right)$

$$2n-\frac{1\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{1-\frac{3}{4}}=2n-4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{2-\frac{4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{n}\right\}=2-0=2$$

■

$\boxed{20}$

$a_1=1$，$a_2=\dfrac{7}{3}$，$3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=0$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

考え方　3 項間漸化式の解法はご存知でしょう．分からない人は「犬プリ」見といてください．

特性方程式は $3t^2-4t+1=0$ ですが，変形する際に，$3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=0$ を

$a_{n+2}-\dfrac{4}{3}a_{n+1}+\dfrac{1}{3}a_n=0$ と考えることがポイント．a_n が求まれば極限計算は簡単です．

（準備）　特性方程式 $3t^2-4t+1=0$ より，

$(3t-1)(t-1)=0$．よって $t=1$，$\dfrac{1}{3}$

解　漸化式より，

$$\begin{cases}a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{1}{3}(a_{n+1}-a_n) & \cdots ① \\ a_{n+2}-\dfrac{1}{3}a_{n+1}=1\left(a_{n+1}-\dfrac{1}{3}a_n\right) & \cdots ②\end{cases}$$

① より，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=\dfrac{4}{3}$，

公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列なので，

$$a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad\cdots ①'$$

② より，数列 $\left\{a_{n+1}-\dfrac{1}{3}a_n\right\}$ は

初項 $a_2-\dfrac{1}{3}a_1=2$，公比 1 の等比数列なので，

$$a_{n+1}-\frac{1}{3}a_n=\left(a_2-\frac{1}{3}a_1\right)1^{n-1}=2 \quad\cdots ②'$$

①′ − ②′ より，

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1}-a_n &=& \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \\ a_{n+1}-\dfrac{1}{3}a_n &=& 2 \\ \hline -\dfrac{2}{3}a_n &=& \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-2 \end{array}$$

$$\therefore\quad a_n=3-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=3$.

■

注　この場合も特性方程式の解の 1 つが $t=1$ なので，1 つの変形式だけで解くこともできますが，あまりおススメしません．

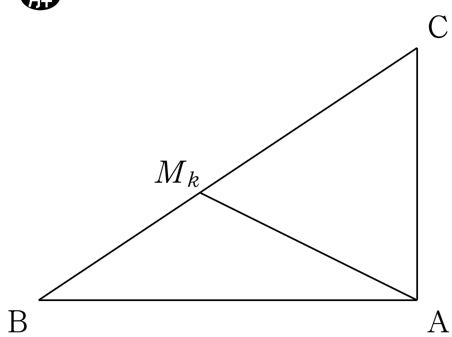
12　漸化式と数列 (2)

このタイプの問題は苦手とする人が多いのですが，残念ながらとても重要で，入試頻出分野です．まずは，正確に図示して状況を正しく把握しよう．何を求めるのが目的なのかを考えながら落ち着いて式変形しよう．数学 Ⅲ としての必要な知識はごくごくわずか．ほとんどが数学 ⅠⅡAB 分野の内容です．

$\boxed{21}$　斜辺 BC の長さが a の直角三角形 ABC がある．斜辺 BC を n 等分する点を M_1，M_2，……，M_{n-1} とし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{AM}_k{}^2=S_n$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n-1}$ を求めよ．

考え方　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n-1}$ を求めるには，S_n を求める，つまり S_n を n の式で表さねばなりません．そのためには，まずは $\mathrm{AM}_k{}^2$ を k の式で表す必要があるので，これが当面の目標になります．与えられてる条件が少ないので，$\mathrm{AM}_k{}^2$ を k の式で表すためには，ある程度自分で文字を追加設定せねばならないでしょう．何を新たに設定するのか試行錯誤が必要ですが，三角形の辺の長さ，それも $\mathrm{AM}_k{}^2$ を求めるわけですから，余弦定理を考えるのは当然のことといえます．よって，以下の **解** のような文字設定が浮かんでくるはずです．

解



BA $= c$ とおくと，△ABC は BC を斜辺とする直角三角形なので，$\cos B = \dfrac{c}{a}$．また，$\triangle \mathrm{BAM}_k$ において，$\mathrm{BM}_k = \dfrac{ak}{n}$ なので，余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AM}_k{}^2 &= \mathrm{BA}^2 + \mathrm{BM}_k{}^2 - 2\cdot\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BM}_k\cdot\cos B\\ &= c^2 + \left(\frac{ak}{n}\right)^2 - 2c\frac{ak}{n}\cdot\frac{c}{a}\\ &= c^2 + \frac{a^2}{n^2}k^2 - \frac{2c^2}{n}k\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{AM}_k^2\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(c^2 + \frac{a^2}{n^2}k^2 - \frac{2c^2}{n}k\right)\\ &= (n-1)c^2 + \frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{2c^2}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}\\ &= (n-1)c^2 + \frac{a^2(n-1)(2n-1)}{6n} - c^2(n-1)\\ &= \frac{a^2(n-1)(2n-1)}{6n}\end{aligned}$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^2(2n-1)}{6n} = \lim_{n\to\infty}a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6n}\right) = \frac{a^2}{3}$$

■

✏注　不思議なことに，新たに追加設定した文字 c が $\mathrm{AM}_k{}^2$ の中には残っていたのに，和をとって S_n にすると，消去されてどっかに行ってしまいました．まあ，結果オーライで良しとしましょう．

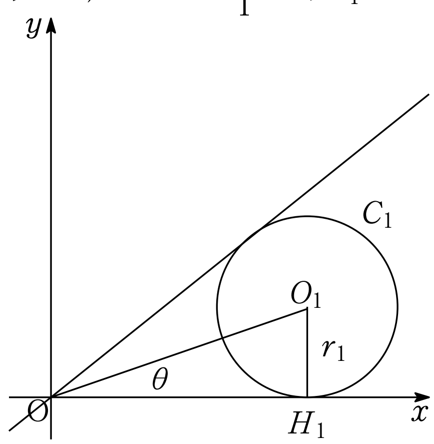
$\boxed{22}$　直線 l を $y = (\tan 2\theta)x$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}\right)$ とする．$y \geqq 0$ の領域にあり，点 $(1,\ 0)$ で x 軸に接し，直線 l にも接する円を C_1 とする．また，直線 l と C_k $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と x 軸に接する円を C_{k+1} とする．円 C_k の面積を S_k とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ を求めよ．ただし，$S_1 > S_2 > S_3 > \cdots\cdots$ とする．

考え方　S_k は円 C_k の面積だから，まずは円 C_k の半径 r_k を求めることになります．これが当面の目標．ポイントは，直線 l の式 $y = (\tan 2\theta)x$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}\right)$ という表記を見た瞬間に，直線 l がどのような直線なのかイメージできるかどうか．これができないとツライ．直線 l は x 軸の正方向と 2θ の角をなす直線を表しています（気づきましたか？）．また，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ より $\tan 2\theta > 0$ なので，l の傾きは正です．

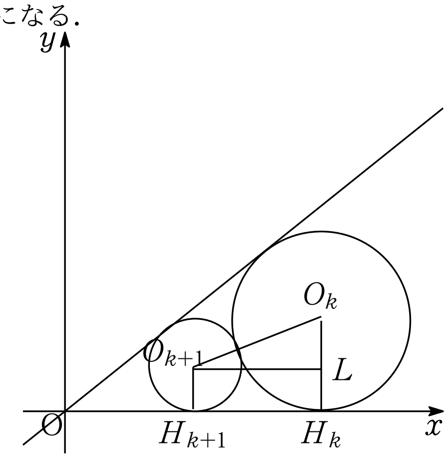
このことがイメージできれば，あとは問題文を正しく読んで，円 C_k $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の位置関係を把握するのですが，円と円が外接したり，直線と接したりする問題は過去にも何度か解いたことがあるはずです．言うまでもなく円と円が外接するときはうまく補助線を引いて，半径の和や差に注目します．この問題では角度をうまく使う必要があります．

解　円 C_k の中心を O_k，半径を r_k とする．また x 軸との接点を H_k とする．

まずは r_1 を求める．直角三角形 $\triangle O_1O\mathrm{H}_1$ に注目すると，$\tan\theta = \dfrac{r_1}{1}$ より $r_1 = \tan\theta$.



次に一般的な 2 つの円 C_k と円 C_{k+1} に注目する．$S_k > S_{k+1}$ なので 2 円の位置関係は図のようになる．



三角形 $O_kO_{k+1}L$ に注目すると，$\angle O_kO_{k+1}L = \theta$ なので，

$$\sin\theta = \frac{O_kL}{O_{k+1}O_k} = \frac{r_k - r_{k+1}}{r_k + r_{k+1}}$$

よって，$(r_k + r_{k+1})\sin\theta = r_k - r_{k+1}$ より，

$$r_{k+1} = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} r_k$$

この漸化式は数列 $\{a_k\}$ が公比 $\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$ の等比数列であることを意味しているので，

$$r_k = r_1 \left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{k-1} = \tan\theta \left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{k-1}$$

よって，円の C_k の面積 S_k は

$$S_k = \pi {r_k}^2 = \pi \tan^2\theta \left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{2k-2}$$

つまり，数列 $\{S_n\}$ は初項 $\pi\tan^2\theta$，公比 $\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2$ の等比数列である．

$0 < \left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2 < 1$ であるので，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ は収束し，その和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} S_k &= \frac{\pi\tan^2\theta}{1-\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2} \\ &= \frac{\pi\tan^2\theta(1+\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)^2-(1-\sin\theta)^2} \\ &= \frac{\pi\tan^2\theta(1+\sin\theta)^2}{4\sin\theta}\end{aligned}$$

である．

■

注　無限級数の和を求めるには部分和 S_n を求めてから $n \longrightarrow \infty$ にするのですが，今回の場合，S_n が等比数列になるので，無限等比級数の和の公式 $\left(\dfrac{\text{初項}}{1-(\text{公比})}\right)$ を用いて計算しました．なお，無限等比級数の収束条件である $-1 <$ 公比 < 1 にも必ず言及しておこう．

13　関数の極限

『関数の極限』を求める手法は，基本的に『数列の極限』を求める手法と同じです．しかし『関数の極限』独特の方法もあるので注意しよう．

$\boxed{23}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$

考え方　そのまま $x=0$ を代入すると，$\dfrac{0}{0}$ となり，わけわかんないので，とりあえず有理化して様子をみます．

解

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} \\ =&\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} \\ =&\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^2)-1}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} \\ =&\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} \\ =&\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} \\ =&\frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

■

$\boxed{23}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

考え方　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ なので，この極限は $\dfrac{\infty}{\infty}$ タイプです．このタイプは「**分母分子を何かで割る**」ことが基本となります．

解　分母分子を e^x で割ると，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{2e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{2-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \\ =\lim_{x\to\infty} \frac{2-\dfrac{1}{e^{2x}}}{1+\dfrac{1}{e^{2x}}} &= \frac{2-0}{1+0} = 2\end{aligned}$$

■

このように，関数の極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ の計算は，数列の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ の計算と基本的に同じですが，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ の計算だけは少し注意が必要です．というのも，そのままで（つまり，$x \longrightarrow -\infty$ のままで）うまくいく場合といかない場合があるからです．

そこで，次のことを基本としておこう．

▷Point◁

$x \longrightarrow -\infty$ の場合の極限値計算では，$x=-t$ と置き換えして，$t \longrightarrow \infty$ として考えたほうが安全である．

このことに注意して，次の問題に取り組もう．

$\boxed{23}$ （3） $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{4x^2-3x})$

解 $x=-t$ と置き換えると，$x\longrightarrow-\infty$ のとき，$t\longrightarrow+\infty$ だから，

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{4x^2-3x})\\
&=\lim_{t\to\infty}(-2t+\sqrt{4t^2+3t})\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{4t^2+3t}-2t)(\sqrt{4t^2+3t}+2t)}{\sqrt{4t^2+3t}+2t}\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{(4t^2+3t)-4t^2}{\sqrt{4t^2+3t}+2t}\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{3t}{\sqrt{4t^2+3t}+2t}\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{3}{\frac{1}{t}\sqrt{4t^2+3t}+2}\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{t}}+2}\\
&=\frac{3}{\sqrt{4+0}+2}=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

■

注 この問題を置き換えせずにそのまま安易に計算すると間違う可能性大です．例えば，上の問題を次のように計算すると，答えがおかしくなってしまいます．どこがおかしいのでしょう．よくやってしまうミスなのですが，気づきますか？

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{4x^2-3x})\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+\sqrt{4x^2-3x})(2x-\sqrt{4x^2-3x})}{2x-\sqrt{4x^2-3x}}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-(4x^2-3x)}{2x-\sqrt{4x^2-3x}}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{2x-\sqrt{4x^2-3x}}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{2-\frac{1}{x}\sqrt{4x^2-3x}}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{2-\sqrt{4-\frac{3}{x}}}\\
&=\frac{3}{2-\sqrt{4-0}}=\frac{3}{2-2}=\frac{3}{0}\quad\cdots\cdots ?
\end{aligned}$$

この解答のどこが間違っているのか気づかない人は質問に来ましょう．

$\boxed{83}$ （4） $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}$

考え方 三角関数が関係した極限の問題においては，ほとんどの問題で次の関係を使うといっても過言ではありません．

▷Point◁（超重要）

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

注 当然ながら，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$ も成立します．$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$ 　だからです．

参考 なお，数年前に大阪大学の入試問題でこの公式の証明が出題されました．証明方法が分からない人は教科書などで必ず確認しておこう．

したがって，**この関係式を使える形にどんどん変形していくことが目標**となります．何とかして $\dfrac{\sin\bigcirc}{\bigcirc}$ を登場させる必要があります．2 通りの方法で登場させてみます．

解 1（2 倍角の公式を利用）

2 倍角の公式 $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ より，

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}&=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2\sin^2 x}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\\
&=\frac{1}{2}\cdot1^2=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

解 2（分母分子に $\underline{1+\cos 2x}$ をかける）

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}&=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos 2x)}{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos 2x)}{1-\cos^2 2x}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos 2x)}{\sin^2 2x}\\
&=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{4}\\
&=1^2\cdot\frac{1+1}{4}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

■

注 この問題の場合は **解** 1 の方が圧倒的に簡単ですが，**解** 2 の手法も大切です．半ばゴーインな感じもしますが，これはこれで大切な式変形です．

$\boxed{23}$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

考え方 この極限値を求めるには次のことが基本となります．

▷Point◁

すべての n について，$a_n \leqq c_n \leqq b_n$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}b_n = \alpha \implies \lim_{n\to\infty}c_n = \alpha$$

が成立する．

このことは「両サイドが同じところに収束すれば，その間も同じところに収束する」ことを意味しています．まさに「ハサミウチの原理」です．これもナイスなネーミング！

解 $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ より，$x > 0$ のとき，

$$-\frac{1}{x} \leqq \frac{\sin x}{x} \leqq \frac{1}{x}$$

このとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ なので，
ハサミウチの原理より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$

■

✐注 この結果は暗記しておこう．なお，三角関数の極限のところで紹介した $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ と混同しないようにしよう．

✐注 $\dfrac{(\text{定数})}{\infty} \longrightarrow 0$ であることはこれまでにも登場していますが，**分子が定数で固定していなくても，ある範囲内の数 (つまり，その範囲内からはみ出さない数) ならば大丈夫**なのです．つまり，

$$\frac{(\text{有限確定})}{\infty} \longrightarrow 0$$

が成立します．つまり，上の問題では，分子部分が -1 以上 1 以下という有限の範囲内に確定していることが重要なのです．ある範囲内にあれば (たとえ，-1 億以上 1 億以下であろうが，-1 兆以上 1 兆以下であろうが)，そんなものすら吹っ飛ばしてしまうくらい ∞ は強烈に大きいのです．

✐注 この先「ハサミウチの原理」は非常に強力な役割を果たします．**極限値がうまく求めにくい場合は「ハサミウチの原理」を利用する**というのは入試数学の常識です．そのうち，否が応でも「ハサミウチの原理」のありがたみを実感するはずです．

参考 「ハサミウチの原理」は極限値を求めるための定理ではありません．極限値 α の見当がついたときに，極限値がまさに α であることを実証するための定理です．だから「同じ極限値に収束する 2 つの数列を求めてはさめばよい」というものの，「同じ極限値に収束する 2 つの数列」を求めた時点で，すでに答えがわかっているのです．

$\boxed{23}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$

考え方 この極限を求めるには自然対数の底 e の定義を必要とします．僕が授業で教えた e の定義は，

▷Point◁(e の定義 ①)

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

と定める．e は無理数でおよそ 2.718.

です．ここから様々な性質が導き出されます．

▷Point◁(e の関係式)

関係式 ①	$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
関係式 ②	$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\log_e(1+t)}{t} = 1$
関係式 ③	$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$

$\boxed{\text{関係式 ①}}$ を e の定義として扱っている本もあり，状況に応じて使い分けるのが良いでしょう．

▷Point◁(決定版 e の定義)

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}, \text{ または}, \ e = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

この 2 通りを使い分ける．

上の 1 つ目の定義を使います．この定義が使える形に変形することがポイント．

解 $\dfrac{3}{x} = h$ とおくと，$x \longrightarrow \infty$ のとき $h \longrightarrow 0$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{3}{h}} = \lim_{h\to 0}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^3 = e^3$$

■

$\boxed{24}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\sin(x-a)}$

$\boxed{24}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-e^{2x-2}}$

考え方　今回の極限値計算はいわゆる「微分の定義」を利用します．

▷Point◁(微分係数の定義)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

つまり，$y=f(x)$ の $x=a$ における接線の傾きを表している．

この問題では，まずは **「微分係数の定義を利用しよう」** と思わなければなりません．思った後は **「じゃあ，微分係数の定義が使える形にどう変形すんねん」** が争点となります．経験とナレに基づく半ばゴーインな変形になりますが，いずれも重要な変形です．

解 (1)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\sin(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot\frac{x-a}{\sin(x-a)}$$

微分係数の定義より $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$ は，

$f(x)=\sin x$ の $x=a$ における接線の傾きを表しているので，

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=f'(a)=\cos a$$

また，$x-a=t$ とおくと，$x\longrightarrow a$ のとき，$t\longrightarrow 0$ だから，

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sin(x-a)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$$

よって，求める極限値は，$\cos a\cdot 1=\cos a$

注　$x\longrightarrow a$ のとき，$x-a=t$ とおいて $t\longrightarrow 0$ とする手法はいろんな場所で登場する極めて重要な手法です．

(2)　$x-1=t$ とおくと，$x\longrightarrow 1$ のとき，$t\longrightarrow 0$ だから

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-e^{2x-2}}&=\lim_{t\to 0}\frac{t}{1-e^{2t}}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{t}{(1-e^t)(1+e^t)}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{t}{1-e^t}\cdot\frac{1}{1+e^t}\end{aligned}$$

微分係数の定義より $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-e^0}{t-0}$ は，$f(x)=e^x$ の $x=0$ における接線の傾きを表しているので，

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=f'(0)=1$$

よって，求める極限値は，$(-1)\cdot\dfrac{1}{1+e^0}=-\dfrac{1}{2}$

■

注　$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{t}{1-e^{2t}}=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{1-e^{2t}}\cdot\frac{1}{2}$ と変形し，$2t$ をひとまとまりに考えて，$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{2t}=f'(0)=1$ としても構いません．この方が簡単かもね．

注　以前に紹介した $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ が三角関数がらみの極限値計算で頻繁に用いる公式なのに対し，$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$ は指数対数関数がらみの極限値計算で用いる重要公式といえます．この公式も証明なしにいきなり使っても良いでしょう．

14　関数の連続性

『関数の連続性』については「よ～わからん」という人が多いですが，大学入試で本格的に問われることはほとんどありません．まあ，気楽にテキトーに取り組んでください．「なんとなく，そんな感じ」で十分です．

「関数 $y=f(x)$ が $x=a$ で連続である」とは簡単に言えば「$y=f(x)$ のグラフが $x=a$ に対応する場所において，『トビ』や『キレメ』がなくつながっている」ということです．このことを数式できちっと定義すると次のようにとても堅苦しくなります．

▷Point◁(連続の定義)

関数 $f(x)$ が **定義域内の** x **の値** a **において連続であるとは，**

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

が成立することである．

連続ではないことを不連続という．

関数 $f(x)$ が定義域内のすべての x の値で連続であるとき，$f(x)$ は連続関数であるという．

さて，関数の連続性で問題となるのは，

ホンマに，$\lim_{x \to a} f(x)$ や $f(a)$ が，キチンと定まるのか？

ということです．$\lim_{x \to a} f(x)$ が存在しなかったり，存在したとしても $f(a)$ と等しくないならば，$x = a$ で不連続になります．だから，単純に

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成立すればよい，とは言うものの，そう単純な話ではありません．

現に，$\lim_{x \to a} f(x)$ が存在するための条件は，

▷Point◁

$\lim_{x \to a} f(x)$ が存在するための条件

$\lim_{x \to a} f(x)$ が存在するためには，右側極限値 $\lim_{x \to a+0} f(x)$ と左側極限値 $\lim_{x \to a-0} f(x)$ がともに存在し，

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x)$$

が成立することである．また，そのとき，

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

である．

以上のことを確認できて初めて「$\lim_{x \to a} f(x)$ が存在する」と言えるのです．

これまた堅苦しいですね．

したがって，関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であることかどうかは次の流れで考察します．

▷Point◁

$x = a$ で連続であることのチェック方法

質問①　$f(a)$ が存在しますか？

質問②　$\lim_{x \to a-0} f(x)$ が存在しますか？

質問③　$\lim_{x \to a+0} f(x)$ が存在しますか？

質問④　$\lim_{x \to a-0} f(x)$ と $\lim_{x \to a+0} f(x)$ が一致しますか？（一致すれば，$\lim_{x \to a} f(x)$ が存在することになります）

質問⑤　$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成立しますか？

以上，5 つの質問にすべて *yes* ならば，$x = a$ で連続です．

25　関数 $f(x) = \lim_{n \to \infty} \dfrac{x^{2n+2} + ax^n + b}{x^{2n} + 2}$ が $x = 1$ で連続となるように，a，b の値を定めよ．

考え方　まずは $\lim_{n \to \infty}$ を計算して $f(x)$ を具体的に決定することです．式中に，x^n とか x^{2n} とかが登場しているので，当然，次に紹介する分類を考えることは言うまでもありません．

x^n の極限（重要）

$x > 1$	のとき	∞ に発散
$x = 1$	のとき	1 に収束
$0 < x < 1$	のとき	0 に収束
$x = 0$	のとき	0 に収束
$-1 < x < 0$	のとき	0 に収束
$x = -1$	のとき	$+1$ と -1 で振動
$x < -1$	のとき	$+\infty$ と $-\infty$ で振動

今回は，$x = 1$ での連続性を調べるので，$x = 1$ の前後だけで考えたいと思います．

解　$f(x)$ を具体的に決定する．

(i)　$x > 1$ のとき，$\lim_{n \to \infty} x^n = \infty$ なので，

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n+2} + ax^n + b}{x^{2n} + 2} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{x^2 + \dfrac{a}{x^n} + \dfrac{b}{x^{2n}}}{1 + \dfrac{2}{x^{2n}}} \\ &= x^2 \end{aligned}$$

(ii)　$x = 1$ のとき，$\lim_{n \to \infty} x^n = 1$ なので，

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n+2} + ax^n + b}{x^{2n} + 2} = \frac{1 + a + b}{3}$$

つまり，$f(1) = \dfrac{1 + a + b}{3}$.

(iii)　$0 < x < 1$ のとき，$\lim_{n \to \infty} x^n = 0$ なので，

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n+2} + ax^n + b}{x^{2n} + 2} = \frac{b}{2}$$

したがって，$f(x)$ が $x = 1$ で連続になるためには，

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} f(x) = f(1)$$

が成立すればよい．

(i) より，$\lim_{x \to 1+0} f(x) = 1^2 = 1$.

(iii) より，$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \dfrac{b}{2}$.

なので，

$$\frac{b}{2}=1=\frac{1+a+b}{3}$$

よって，$a=0$，$b=2$

■

$\boxed{26}$　c を $0<c<\dfrac{1}{e}$ である定数とする．方程式 $x=ce^x$ は，0 と 1 の間にただ 1 つの実数解をもつことを証明せよ．

考え方　あたえられた区間内での解の存在についてギロンするには次の『中間値の定理』が有効です．

▷Point◁(中間値の定理)

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ において連続で，$f(a)$ と $f(b)$ が異符号であれば，$f(x)=0$ は，開区間 $(a,\ b)$ 内に少なくとも 1 つの実数解をもつ．

注　区間内で単調増加または単調減少ならば解は 1 個ですが，そうでなければ解は何個あるかはわかりません．「最低 1 個はある」という意味です．

本問では，$f(x)=x-ce^x$ とおいて $f(0)$ と $f(1)$ の符号を調べるのですが，これだけでは不十分です．この問題では「ただ 1 つの実数解」であることを証明するので，$f(x)$ が $0<x<1$ で単調増加または単調減少であることを示さねばなりません．

解　$f(x)=x-ce^x$ とおくと，$0\leqq x\leqq 1$ において，$y=f(x)$ は連続であり，$0<c<\dfrac{1}{e}$ より

$$f(0)=-c<0,\quad f(1)=1-ce>0$$

であるので，$f(x)=$ は $0<x<1$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ．

次に $y=f(x)$ が単調増加であることを示す．

まず，$f'(x)=1-ce^x$．

$y=e^x$ は単調増加だから，$0<x<1$ において $e^0<e^x<e^1$。

つまり，$1<e^x<e$．

各項 c 倍して．$c<ce^x<ce$．

また $ce<1$ だから，$ce^x<1$

よって $f'(x)>0$ なので，$f(x)$ は $0<x<1$ において単調増加である．

以上より，$f(x)=$ は $0<x<1$ の範囲にただ 1 つの実数解をもつ．

■

注　最後の $f'(x)>0$ であることを示す部分がややこしいと思います．

次のように考えても良いでしょう．2 回微分して $y=f'(x)$ のグラフをイメージします．

解（別解）

$f''(x)=-ce^x<0$ なので，$f'(x)$ は単調減少．

$f'(0)=1-c>0$，$f'(1)=1-ce>0$ なので，$0\leqq x\leqq 1$ において $f'(x)>0$ である．

15　演習問題 (2)

基本問題はありません．