オリスタ基本問題を全問解説しましょう

（第 26 章～第 35 章まで）

26　定積分で表された関数 (1)

まず始めに次のことを確認しておこう．

▷Point◁

何の文字について微分するのか，何の文字について積分するのかを常に意識すること．
積分の式の見た目にビビらず，式の意味を考えて計算結果を予測すること．

例えば，

$$\int f(x)\,dx = \ x\text{の式},\quad \int f(t)\,dt = \ t\text{の式}$$

したがって，定積分になると，

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \ \text{定数}$$

（⟶ x の関数を x で積分し，x に 0 や 1 を代入するから）

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \ \text{定数}$$

（⟶ t の関数を t で積分し，t に 0 や 1 を代入するから）

$$\int_0^x f(t)\,dt = \ x\text{の式}$$

（⟶ t の関数を t で積分し，t に x や 0 を代入するから）

一般に，a，b を定数とするとき，

$$\int_a^b f(t)\,dt = \ \text{定数},\quad \int_a^x f(t)\,dt = \ x\text{の式}$$

となります．

✏注　なぜこのような結果になるのか，その理由をしっかり理解しよう．つまり，

・積分の中身が $\underline{t\text{ だけの式}}$ であること．

・その関数を t で積分し（当然積分した結果も t だけの式），その t に定数 a や b を代入すると，**結果的に t がなくなって**定数になるし，その t に変数 x や定数 b を代入すると，**結果的に t がなくなって** x の関数になるわけです．

このように，式の見た目ビビらず，落ち着いて積分した最終結果を予測することはとても重要なことです．

$\boxed{46}$

(1) $\displaystyle\int_0^\pi \sin t\,dt$　$\displaystyle\int_0^\pi t\sin t\,dt$ を求めよ．

(2) $f(x) = x + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

考え方　(1) は単なる計算問題です．

(2) は先ほども説明したように，

$\displaystyle\int_a^b (t\text{ のだけ式})\,dt$ は定数になるので，

▷Point◁

$$\int_a^b (t\text{ だけの式})\,dt = A\ (\text{定数})$$

とおくことがポイント．よって，

$\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin t\ dt = A$ とおくと $f(x) = x + \dfrac{1}{\pi}A$ というように，$f(x)$ の形はほとんど決定してしまいます．つまり定数 A の値がわかればよいのです．「$f(x)$ **を求める問題」が「定数 A を決定する問題」になったわけです．**

解　(1) $\displaystyle\int_0^\pi \sin t\,dt = \Big[-\cos t\Big]_0^\pi = 2$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t\sin t\,dt &= \int_0^\pi t(-\cos t)'\,dt\\ &= \Big[t(-\cos t)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi t'(-\cos t)\,dt\\ &= \pi + \int_0^\pi \cos t\,dt\\ &= \pi + \Big[\sin t\Big]_0^\pi = \pi\end{aligned}$$

✏注　$\displaystyle\int_0^\pi \sin t\,dt = 2$，$\displaystyle\int_0^\pi \cos t\,dt = 0$ は暗記しておこう．

(2) $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt$ は定数なので，これを A とおくと，$f(x) = x + \dfrac{1}{\pi}A$ となる．よって，

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt = A & \cdots ① \\ f(x) = x + \dfrac{1}{\pi}A & \cdots ②\end{cases}$$

② より，$f(t)=t+\dfrac{1}{\pi}A$ として ① に代入すると，

$$\int_0^{\pi}\left(t+\frac{1}{\pi}A\right)\sin t\,dt=A$$

$$\int_0^{\pi}\left(t\sin t+\frac{1}{\pi}A\sin t\right)\,dt=A$$

(1) の結果を利用すると，

$\pi+\dfrac{2}{\pi}A=A$　　$\therefore\ A=\dfrac{\pi^2}{\pi-2}$

よって，$f(x)=x+\dfrac{\pi}{\pi-2}$.

■

$\boxed{47}$　実数 t に対して，

$$F(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(tx-\cos x)^2\,dx$$

は t の 2 次関数である．t^2 の係数と t の係数を求めよ．

考え方　今度は t と x が混じった関数を x で積分していることを確認しよう．したがって，積分計算するにあたり t は定数扱い です．x で積分して x に 0 とか $\dfrac{\pi}{2}$ とか代入するのだから，最終的に t だけが残るので $F(t)$ というように t の関数になるのです．

なお，この問題では「t^2 と t の係数を求めよ」ということですが，そんなセコイこと言わずに，$F(t)$ を完全決定してあげましょう．

解

$$\begin{aligned}F(t)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t^2x^2-2tx\cos x+\cos^2 x)\,dx\\&=t^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\,dx-2t\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx\\&\qquad+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx\end{aligned}$$

したがって，

$(t^2\text{の係数})=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\,dx$

$(t\text{ の係数})=-2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$

$(\text{定数項})=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$

である．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sin x)'\,dx\\&=\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x'\sin x\,dx\\&=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx\\&=\frac{\pi}{2}-1\end{aligned}$$

注　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$ は暗記しておこう．

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx\\&=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

したがって，

$$F(t)=\frac{\pi^3}{24}t^2+(2-\pi)t+\frac{\pi}{4}$$

■

注　以前に配布したプリント『定積分にまつわる話』を必ず見ておこう．

27　定積分で表された関数 (2)

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ は定数なので $=A$ とおいて処理しましたが，$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ は x の式です．**定数ではないので A などとは絶対に置けません．**この形の定積分で重要なことは次の事実です．

▷Point◁

$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ を x で微分 すると，

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x)$$

$\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ を x で微分 すると，

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\right)'=f(v(x))\cdot v'(x)-f(u(x))\cdot u'(x)$$

数学 II では具体例で説明しましたが，ここは理系ですからきっちりと一般的に証明できるようにしておこう．

✎注 分からない人は，以前に配布したプリント『定積分にまつわる話』を必ず見ておこう．

このタイプの定積分で忘れてはならないのが，次の手法です．

▷Point◁

$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ や $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ は，**積分の上端と下端が同じになるような x を代入すると値は 0 になる．**

$\boxed{48}$

$$f(x)=\int_0^x(\cos t+\cos 2t)\,dt\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$$

の極大値，極小値と，それらを与える x の値を求めよ．

考え方 極値をとる x を求めるには，まずは $f'(x)=0$ を解きますが，当然ながらこれだけでは不十分です．なぜなら $f'(\alpha)=0$ だからといって $x=\alpha$ で極値かどうかはわからないからで，増減表またはグラフをかいて実際に極値かどうか確かめる必要があります．

解 両辺を x で微分すると，

$$f'(x)=\left(\int_0^x(\cos t+\cos 2t)\,dt\right)'$$

$$f'(x)=\cos x+\cos 2x=\cos x+2\cos^2 x-1$$

$f'(x)=0$ より，$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$.
$\cos x=\dfrac{1}{2}$，-1. $\therefore$ $x=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5\pi}{3}$，$\dfrac{3\pi}{2}$.
よって，$y=f(x)$ の増減は以下の通り．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{3}$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↘		↗	

$x=\dfrac{\pi}{3}$ で極大，$x=\dfrac{5\pi}{3}$ で極小となる．
さて，$f'(x)=\cos x+\cos 2x$ より，

$$f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+C$$

$f(0)=0$ より，$C=0$

$$f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

したがって，

$x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，極大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$
$x=\dfrac{5\pi}{3}$ のとき，極大値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

■

✎注 $x=\dfrac{3\pi}{2}$ のとき，$f'(x)=0$ ですが，$x=\dfrac{3\pi}{2}$ の前後で符号変化が起こっていないので，極値にはならないことを意識しよう．

$\boxed{49}$ $F(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{\cos t}{1+e^t}\,dt$ について，
(1) $F'(x)$ を求めよ．
(2) $F(x)$ を求めよ．

考え方 積分する関数がずいぶん複雑ですが，$g(t)=\dfrac{\cos t}{1+e^t}$ とおけばどうってことありません．

解 $g(t)=\dfrac{\cos t}{1+e^t}$，$\displaystyle\int g(t)\,dt=G(t)$ とする．$G'(t)=g(t)$ が成立する．

$$F(x)=\Big[\,g(t)\,\Big]_{-x}^{x}=G(x)-G(-x)$$

$$\begin{aligned}F'(x)&=G'(x)-G'(-x)\\&=g(x)-g(-x)\cdot(-x)'\\&=g(x)+g(-x)\\&=\frac{\cos x}{1+e^x}+\frac{\cos(-x)}{1+e^{-x}}\\&=\frac{\cos x}{1+e^x}+\frac{e^x\cos x}{e^x+1}\\&=\frac{(1+e^x)\cos x}{1+e^x}=\cos x\end{aligned}$$

よって，$F(x)=\displaystyle\int\cos x\,dx=\sin x+C$.
$F(0)=0$ より $C=0$. よって，$F(x)=\sin x$.

■

✎注 最後で $F(0)$ を考えたのは，積分区間の両端を 0 にするためにです．

28　定積分と級数

このような考え方を**区分求積法**といいます (別に名前なんてどーでもエエです). ようするに,「無限級数の和が定積分を用いて表現できる」「無限級数の和が定積分で計算できる」という事実が大切なのです.

▷Point◁

Step ①　和を $\sum$ 記号を用いて表す.
(⟶　変化している箇所を k と置くことがポイント)

Step ②　$\dfrac{1}{n}$ を式の前に出す.

Step ③　$\dfrac{k}{n}$ の形をどんどん作っていく.
(⟶　$\dfrac{k}{n}=x$ とおく).

Step ④　上の対応関係をイメージして, 定積分に持ち込む.

50　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{6n}$ を求めよ.

考え方　最初から $\sum$ を用いて書かれてあるし, $\dfrac{1}{n}$ も前に出ているので, ポイントの Step ③ から考えればよいですね.
$\dfrac{k}{n}=x$ とおくと, $\cos^2\dfrac{k\pi}{6n}\longrightarrow\cos^2\dfrac{\pi}{6}x$.
$n\longrightarrow\infty$ のとき,

$$\frac{1}{n}\longrightarrow dx,\qquad \sum_{k=1}^{n}\longrightarrow\int_0^1$$

なので, 先ほどの対応関係をイメージすれば大丈夫.

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{6n}&=\pi\int_0^1\cos^2\frac{\pi}{6}x\,dx\\&=\pi\int_0^1\frac{1+\cos\frac{\pi}{3}x}{2}\,dx\\&=\frac{\pi}{2}\Big[\,1+\frac{3}{\pi}\sin\frac{\pi}{3}x\,\Big]_0^1\\&=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{3}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=\frac{\pi}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

■

51　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2+k^2}$ を求めよ.

考え方　まずはセオリー通りに $\dfrac{1}{n}$ を前に出すことから始めます. 次に $\dfrac{k}{n}$ の形を作り出すのですが, うまくできますか?

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2+k^2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n+\frac{k^2}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\cdot\frac{k}{n}}{1+\frac{k^2}{n^2}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\cdot\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\\&=\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}\,dx\end{aligned}$$

$1+x^2=t$ とおくと, $2xdx=dt$ であり,

x	$0\longrightarrow 1$
t	$1\longrightarrow 2$

$$\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}\,dx=\int_1^2\frac{1}{t}\,dt=\Big[\,\log|t|\,\Big]_1^2=\log 2$$

■

参考　授業中に言った「3 年前のオリスタには載っていたがその後, ボツになった問題」を紹介しよう.

旧オリスタ基本問題　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^6}\sum_{k=n+1}^{2n}k^5$

考え方　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^6}\sum_{k=n+1}^{2n}k^5=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$ と変形することは大丈夫でしょう. 積分区間は, $\sum$ 記号より, $n+1\leqq k\leqq 2n$ なので, $1+\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{k}{n}\leqq 2$.
$\dfrac{k}{n}=x$ とおき, $n\longrightarrow\infty$ とすると, $1\leqq x\leqq 2$.
つまり, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\longrightarrow\int_1^2$ となります. よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{k}{n}\right)^5=\int_1^2x^5\,dx=\frac{21}{2}$$

模範解答はもっとまわりくどい方法でやってました. やっぱり僕の解答がベストです.

29　定積分と不等式

$\boxed{52}$　a を負でない実数，n を自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

（1）　$\dfrac{1}{2a+3} < \displaystyle\int_a^{a+1} \dfrac{dx}{2x+1} < \dfrac{1}{2a+1}$

（2）　$\dfrac{1}{2}\log(2n+3) < 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{2n+1} < 1 + \dfrac{1}{2}\log(2n+1)$

考え方　まずはこの不等式を「グラフの面積を利用して証明しよう」と思わなければなりません．しかも「$\int$ 部分は曲線の面積を表していて，この部分を長方形で挟んで面積比較しているはず ……」と想像しなければなりません．実にイマジネーションを刺激する問題です．

では，どんなグラフをイメージするのか．$\int$ 内の関数を見ればほとんど明らかでしょう．挟む長方形の面積も，積分区間が $a \leqq x \leqq a+1$ と区間の幅が 1 であることを考えれば想像できるはずです．

そうすれば関数 $y = \dfrac{1}{2x+1}$ を連想するのは当然なことといえます．この思考方法はとても重要です．

解　（1）　$y = \dfrac{1}{2x+1}$ のグラフを考える．A$(a,\ 0)$，　B$(a+1,\ 0)$ とし，点 C，D，E，F を右図のように定める．図より，

四角形 $ABEF <$ 斜線部分の面積 $<$ 四角形 $ABCD$

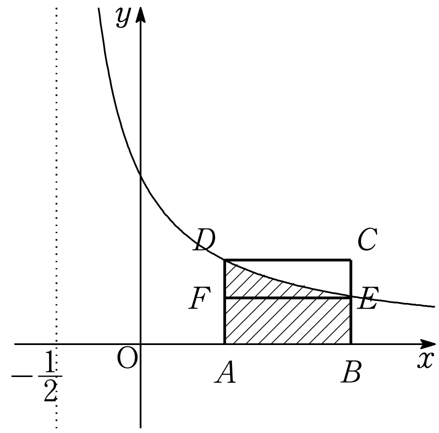
斜線部分の面積は $\displaystyle\int_a^{a+1} \dfrac{dx}{2x+1}$．

$AB = 1$，$BE = \dfrac{1}{2a+3}$，$AD = \dfrac{1}{2a+1}$ なので，

四角形 ABEF$= 1 \times \dfrac{1}{2a+3} = \dfrac{1}{2a+3}$，

四角形 ABCD$= 1 \times \dfrac{1}{2a+1} = \dfrac{1}{2a+1}$．よって，

$$\frac{1}{2a+3} < \int_a^{a+1} \frac{dx}{2x+1} < \frac{1}{2a+1}$$



■

（2）　右図より，斜線部分の面積は長方形の面積の総和よりも小さい．斜線部分の面積は

$$\int_0^{n+1} \frac{1}{2x+1}\,dx = \left[\ \frac{1}{2}\log|2x+1|\ \right]_0^{n+1}$$
$$= \frac{1}{2}\log(2n+3)$$

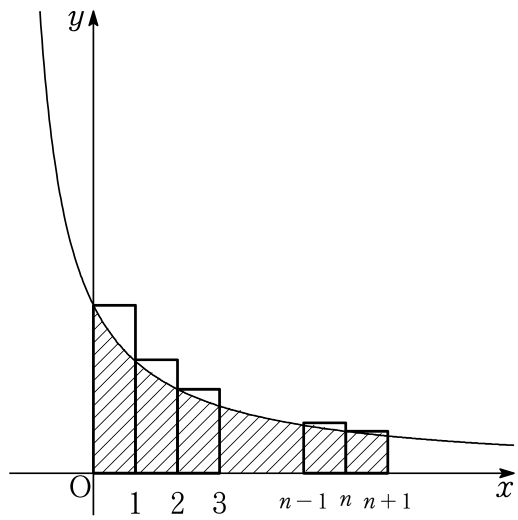
長方形の面積の総和は

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n+1}$$

したがって，

$$\frac{1}{2}\log(2n+3) < 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n+1}$$

が成立する．



右図より，点線部分の面積は長方形の面積の総和よりも大きい．

斜線部分の面積は，

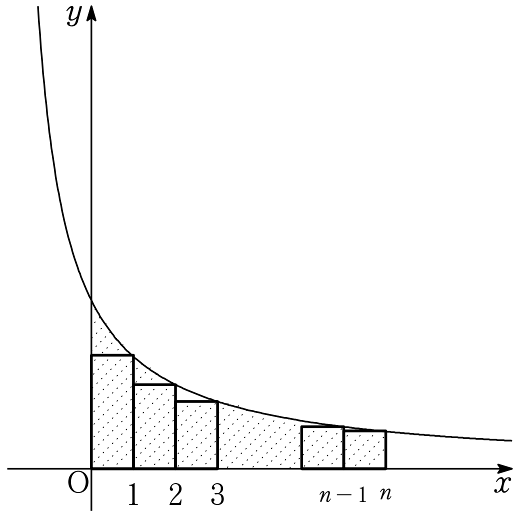
$$\int_0^n \frac{1}{2x+1}\,dx = \left[\,\frac{1}{2}\log|2x+1|\,\right]_0^n = \frac{1}{2}\log|2n+1|$$

長方形の面積の総和は

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n+1)}$$

したがって，$n>1$ のとき，

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2}\log(2n+1)$$



両辺に１を加えて

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}<1+\frac{1}{2}\log(2n+1)$$

$$\therefore\ \ \frac{1}{2}\log(2n+3)<1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}<1+\frac{1}{2}\log(2n+1)$$

✎**注**（1）の不等式 $\dfrac{1}{2a+3}<\displaystyle\int_a^{a+1}\dfrac{dx}{2x+1}<\dfrac{1}{2a+1}$ は上の図の１個分の区間（$a\leqq x\leqq a+1$）に注目していたわけです．よって，（1）の不等式を寄せ集めればそのまま（2）の証明になります．すなわち，

$\displaystyle\sum_{a=0}^{n-1}\frac{1}{2a+3}<\sum_{a=0}^{n-1}\int_a^{a+1}\frac{dx}{2x+1}$ より，$\displaystyle\sum_{a=0}^{n-1}\frac{1}{2a+3}<\int_0^n\frac{dx}{2x+1}$．したがって，

$\displaystyle\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}<\left[\,\frac{1}{2}\log|2x+1|\,\right]_0^n$

積分計算して両辺に１を加えると，$\displaystyle 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}<1+\frac{1}{2}\log(2n+1)$

$\displaystyle\sum_{a=0}^{n}\int_a^{a+1}\frac{dx}{2x+1}<\sum_{a=0}^{n}\frac{1}{2a+1}$ より，$\displaystyle\int_0^{n+1}\frac{dx}{2x+1}<\sum_{a=0}^{n}\frac{1}{2a+1}$．したがって，

$\displaystyle\left[\,\frac{1}{2}\log|2x+1|\,\right]_0^{n+1}<1+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}$．

よって，$\displaystyle\frac{1}{2}\log(2n+3)<1+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}$．

模範解答はこうでしょうが，どう考えても僕の解法のほうが分かりやすいと思います．

30　演習問題 (4)

基本問題はありません．

31　面積 (1)

今回は陰関数で表された曲線と媒介変数表示された関数の曲線を扱います．どちらも簡単には図示できないので苦手意識の強い分野ですが，重要な曲線なので必ずマスターしてください．

$\boxed{53}$ 曲線 $(x-y)^2=2x$ の概形をかき，この曲線と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

考え方 このままではグラフの描きようがありません．とりあえず，$y=$（x の式）に変形することを試みます．例えば，円の式 $x^2+y^2=1$ は，$y^2=1-x^2$ より $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ として，２つの関数 $y=\sqrt{1-x^2}$ と $y=-\sqrt{1-x^2}$ を会わせたものであると解釈しましたね．あれと同じ感覚です．でも，その前に確認しておくことがあります．

定義域 (x の範囲) とグラフの対称性です．しかし，今回の場合は，x の代わりに $-x$ を代入したり，y の代わりに $-y$ を代入すると式の形が変わってしまうので，対称性はなさそうです．

解　$(x-y)^2=2x$ より $x \geqq 0$ であり，

$$(x-y)^2=2x \iff x-y=\pm\sqrt{2x} \iff y=x\pm\sqrt{2x}$$

なので，2 つのグラフ $y=f(x)=x+\sqrt{2x}$ と $y=g(x)=x-\sqrt{2x}$ を考える．

$f(x)=x+\sqrt{2x}$ について

$f'(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{2x}}>0$ なので，$y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で単調増加．

$g(x)=x-\sqrt{2x}$ について

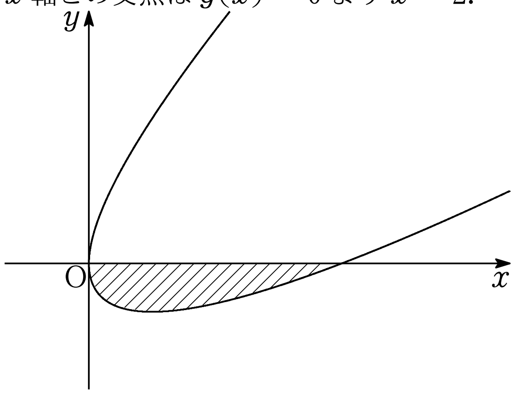
$g'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{2x}}=\dfrac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{2x}}$.

$g'(x)=0$ より $\sqrt{2x}=1$. $\therefore\ x=\dfrac{1}{2}$.

$y=g(x)$ の増減は以下の通り．

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	$\frac{1}{2}$	↗

x 軸との交点は $g(x)=0$ より $x=2$.



したがって，よって求める面積は図の斜線部分．

$$\begin{aligned}S&=-\int_0^2(x-\sqrt{2x})\,dx\\&=\left[-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2\\&=-2+\frac{8}{3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

■

注　グラフの精度について考えてみよう．上で書いた増減表のような単なる増加，減少だけの情報だけでは図のようなグラフは描けません．特に原点周辺の様子などはもう少し検証が必要です．$f'(x)$ や $g'(x)$ の式に注目するといずれも $\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ があり，$x=0$ で定義されません．しかし $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sqrt{2x}}=+\infty$ であることに注意すれば，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)=+\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+0}g'(x)=-\infty$ となります．このことは $y=f(x)$ の原点における接線の傾きが $+\infty$ に近づき，$y=g(x)$ の原点における接線の傾きが $-\infty$ に近づいていることを意味しており，グラフの原点における接線が y 軸に平行 (今回の場合は y 軸そのもの) になることがわかります．

参考　グラフの様子をみるとなんとなく放物線が傾いているように見えます．本当に放物線なのか，だとしたらどんな放物線をどれだけ傾けたものなのかを知るには，1 次変換の知識が必要です．1 次変換は今となっては範囲外ですが，興味ある人は学習してみてください．

$\boxed{54}$　t を媒介変数とするとき，
$x=3t^2$, $y=3t-t^3$ で表される曲線を図示せよ．また，この曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ．

考え方　媒介変数表示のイメージとしては，t を時刻と考えて，t 秒時における座標が $(3t^2,\ 3t-t^3)$ であると考えればよいでしょう．t に具体的に数値を代入して点をいくつかプロットすることも大切なことです

媒介変数表示された関数を図示するには，t の変化に伴って，x 座標と y 座標がそれぞれどのように変化するのかを追っていく必要があります．例えば，$\dfrac{dx}{dt}>0$ ならば，t が増えれば x 座標も増えることを意味し，$\dfrac{dx}{dt}<0$ ならば，t が増えれば x 座標が減ることを意味しています．

また，今回の場合で重要なことは**グラフの対称性**です．式を見れば対称性がわかるのですが気づきましたか．t の変わりに $-t$ を代入すると，x は変わりませんが y は符号だけが変化します．つまり，$(x,\ y)\longrightarrow(x,\ -y)$. このことは**グラフが x 軸対称であることを意味しています．**

とりあえず具体的にみていくことにしよう．

解

$x=3t^2$ より，$\dfrac{dx}{dt}=6t$．よって，
$t>0$ のとき，$\dfrac{dx}{dt}>0$.
$t<0$ のとき，$\dfrac{dx}{dt}<0$.
$y=3t-t^3$ より，
$\dfrac{dy}{dt}=3-3t^2=3(1-t)(1+t)$．よって，
$t<-1$，$1<t$ のとき，$\dfrac{dy}{dt}<0$.
$-1<t<1$ のとき，$\dfrac{dy}{dt}>0$.

以上をまとめると，

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$\dfrac{dx}{dt}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	↘	3	↘	0	↗	3	↗
$\dfrac{dy}{dt}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	↘	-2	↗	0	↗	2	↘

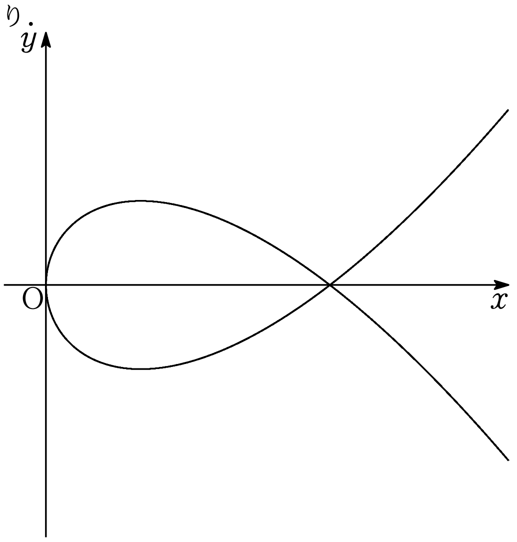
つまり，$t<-1$ のとき，x 座標も y 座標も減少（つまり左下）方向に点 $(3,\ -2)$ まで移動，

$-1<t<0$ のとき，x 座標は減少，y 座標は増加（つまり左上）方向に点 $(0,\ 0)$ まで移動，

$0<t<1$ のとき，x 座標も y 座標も増加（つまり右上）方向に点 $(3,\ 2)$ まで移動，

$1<t$ のとき，x 座標は増加，y 座標は減少（つまり右下）方向に移動，

することがわかります．よってグラフは次の通り．



$y=0$ となる t は，$3t-t^3=t(3-t^2)=0$ より $t=0,\ \pm\sqrt{3}$. $t=\pm\sqrt{3}$ のとき $x=3t^2=9$. なので，図より求める面積は対称性を考えて
$S=2\displaystyle\int_0^9 y\,dx$

$x=3t^2$ より，
$dx=6tdt$．よって，

x	$0\longrightarrow 9$
t	$0\longrightarrow\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}S&=2\int_0^{\sqrt{3}}(3t-t^3)6t\ dt\\&=2\int_0^{\sqrt{3}}(18t^2-6t^4)\ dt\\&=2\Big[\,6t^3-\frac{6}{5}t^5\,\Big]_0^{\sqrt{3}}\\&=2\Big(6\cdot3\sqrt{3}-\frac{6}{5}\cdot9\sqrt{3}\Big)\\&=\frac{72\sqrt{3}}{5}\end{aligned}$$

■

32　面積 (2)

$\boxed{55}$　a を正の定数とし，2つの放物線 $ay=x^2$ と $ax=y^2$ について考える．
(1)　2つの放物線の交点の座標を求めよ．
(2)　2つの放物線で囲まれた部分の面積が3となるように，a の値を求めよ．

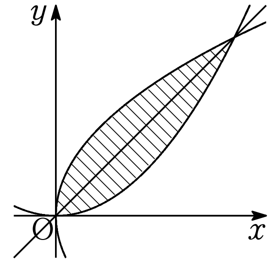
考え方　交点を求めるには，2つの式を連立させますが，今回の2つの式が x と y の文字を入れ換えただけになっているので，2つのグラフが $y=x$ に関して対称であることがわかります．

ということは，$ay=x^2$ と $ax=y^2$ を連立する代わりに，$ay=x^2$ と $y=x$ を連立させてもよいのです．したがって，交点は $x^2=ax$ より，$x=0$，$x=a$ です．

囲まれた部分も $y=x$ に関して対称なので・・・

解　(1) 省略.

(2)　求める面積は図の斜線部分であり，これは $y=x$ に関して対称である．



したがって，求める面積は $x^2=ay$ と $y=x$ で囲まれた部分の面積の 2 倍に等しい．

$$2\int_0^a\left(x-\frac{1}{a}x^2\right)dx=2\frac{1}{a}\frac{(a-0)^3}{6}=\frac{a^2}{3}$$

よって，$\dfrac{a^2}{3}=3$．$a>0$ より $a=3$

■

注 真面目にやるなら，$x^2=ay$ と $y^2=ax$ を連立させ，$\left(\dfrac{x^2}{a}\right)^2=ax$ を解きます．

変形すると，$x^4=a^3x$ より，$x(x^3-a^3)=0$．

よって，$x=0$，$x=a$．

また面積は，$y^2=ax \iff y=\pm\sqrt{ax}$ より，$\displaystyle\int_0^a\left(\sqrt{ax}-\frac{1}{a}x^2\right)dx$ を計算すればよいでしょう．

なお，4STEP $\boxed{440}$ (5) に類題があるので必ず見ておくこと．

33　体積

今回の体積は全て回転体の体積です．まずはグラフの交点や上下関係に注意して図示し，回転してできる立体のイメージをつかみます．求め方の基本は「体積は断面積の寄せ集め」だということ。原則的に回転軸に垂直な断面で切って考えます．断面は円またはドーナツ状になると思います．

$\boxed{56}$　次の曲線と直線で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

$y=x+\cos x$,

x 軸，　y 軸，　直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$

考え方　まずは図示して立体のイメージをしよう．

解　$y=x+\cos x$ について

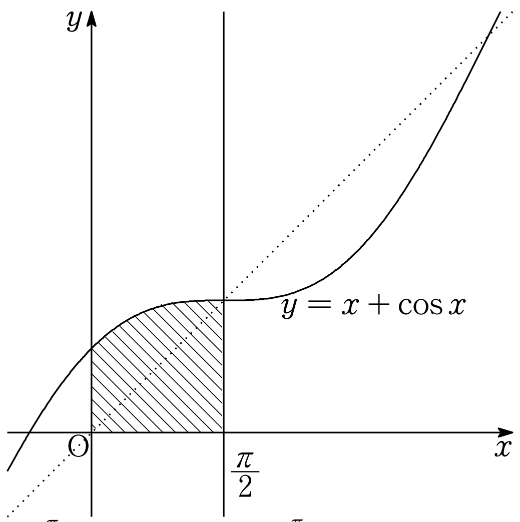
$y'=1-\sin x$ なので，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における増減は以下の通り．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
y'		$+$	0
y	1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

（右図では $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ 以外の部分も図示しています）

したがって，図の斜線部分を x 軸の周りに回転してできる体積は，

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos x)^2\,dx\\&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2+2x\cos x+\cos^2 x)\,dx\end{aligned}$$



$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sin x)'\,dx$

$\displaystyle=[x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}-1$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{2}x+\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

したがって，

$$V=\pi\left\{\frac{\pi^3}{24}+2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+\frac{\pi}{4}\right\}=\pi\left(\frac{\pi^3}{24}+\frac{5\pi}{4}-2\right)$$

■

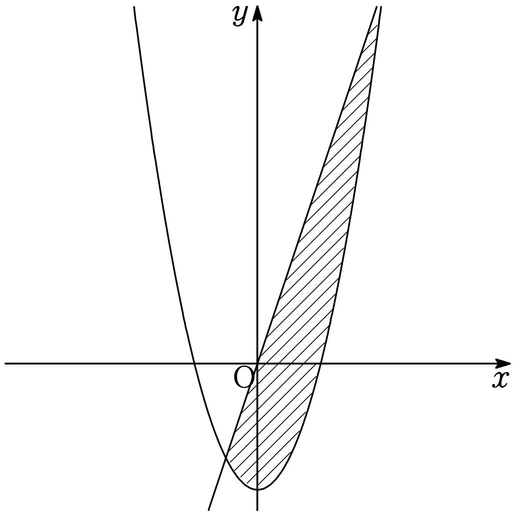
注　積分計算は必ず正確にできるようにしておこう．この程度の計算でミスは許されません．

なお，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$ は公式として暗記しておきたいところ．

$\boxed{57}$　放物線 $y=x^2-4$ …… ① と，直線 $y=3x$ …… ② について，次の問いに答えよ．
(1) ① と ② の交点を求めよ．
(2) ① と ② で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

考え方　図示すれば分かりますが，回転させる図形が x 軸をまたいでいます．ということは，図形を折り上げて考える必要があります．

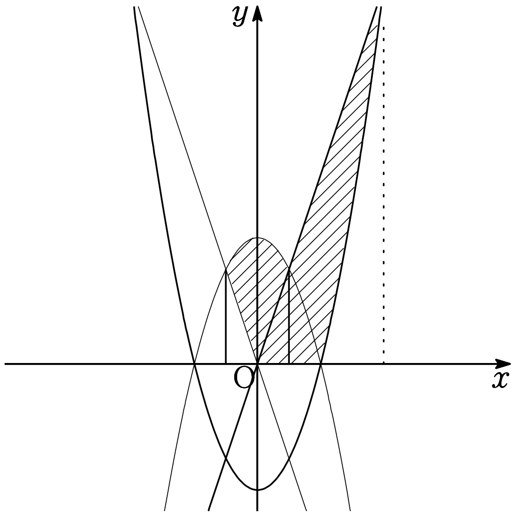
解 (1) 交点の x 座標は，
$x^2-4=3x$ より，$x^2-3x-4=0$．
$(x+1)(x-4)=0$．$x=-1,\ 4$
よって，$(-1,\ -3)$，$(4,\ 12)$



↓

x 軸より下部を折り上げ

↓



(2) 求める立体の体積は上図の斜線部分を x 軸の周りに回転したものであり，この立体はつまり x 軸より下部を上に折り上げた下図を x 軸周りに回転した立体の体積に等しい．
よって，図の対称性を考慮して，

$$
\begin{aligned}
V&=\pi\int_{-1}^{1}(-x^2+4)^2\,dx+\pi\int_1^4(3x)^2\,dx\\
&\qquad-\pi\int_{-1}^{0}(-3x)^2\,dx-\pi\int_2^4(x^2-4)^2\,dx\\
&=2\pi\int_0^1(x^4-8x^2+16)\,dx+\pi\int_1^4 9x^2\,dx\\
&\qquad-\pi\int_{-1}^{0}9x^2\,dx-\pi\int_2^4(x^4-8x^2+16)\,dx\\
&=2\pi\Big[\frac{1}{5}x^5-\frac{8}{3}x^3+16x\Big]_0^1+\pi\big[3x^3\big]_1^4\\
&\qquad-\pi\big[3x^3\big]_{-1}^0-\pi\Big[\frac{1}{5}x^5-\frac{8}{3}x^3+16x\Big]_2^4\\
&=2\pi\Big(\frac{1}{5}-\frac{8}{3}+16\Big)+3\pi(4^3-1^3)\\
&\qquad-3\pi(0+1)-\pi\Big(\frac{1}{5}(4^5-2^5)-\frac{8}{3}(4^3-2^3)+16(4-2)\Big)\\
&=\pi\Big(\frac{2}{5}-\frac{16}{3}+32\Big)+189\pi\\
&\qquad-3\pi-\pi\Big(\frac{992}{5}-\frac{448}{3}+32\Big)\\
&=\pi\Big(\frac{2-992}{5}+\frac{448-16}{3}\Big)+186\pi\\
&=\pi(-198++144+186)\\
&=132\pi
\end{aligned}
$$

■

✎注　考え方は単純ですが，立式から計算完了まで，かなりの手間がかかります．こういう問題が短時間でノーミスで解けるかが勝負の別れ目です．

34　種々の量の計算

$\boxed{58}$ (1) 曲線 $9y^2=(x+5)^3$ と y 軸で囲まれた図形の周の長さを求めよ．

考え方　まずは曲線の概形を書かねばなりませんが，いきなり微分する前にやるべきことはあります．
① 対称性を確認する．

$\longrightarrow$ y の代わりに $-y$ を代入しても式が変わらない

② 定義域，値域を確認する．

$\longrightarrow$ $y^2 \geqq 0$ より $(x+5)^3 \geqq 0$

これらのことからイロイロ分かりますね．

また，この問題は計算で少し工夫する必要があります．

解　$9y^2 = (x+5)^3$ において y の代わりに $-y$ を代入しても式が変わらないので，x 軸対称である．したがって $y \geqq 0$ として考える．

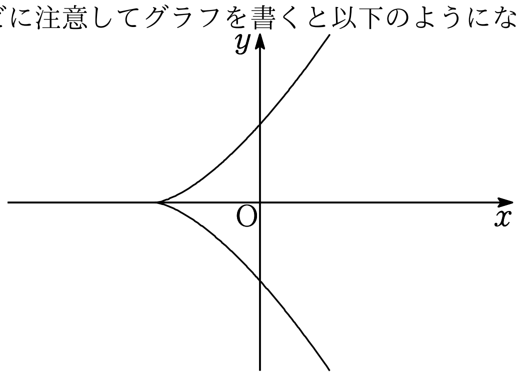
$y^2 \geqq 0$ より $(x+5)^3 \geqq 0$ なので定義域は $x \geqq -5$.

また，$y=0$ のときは $x=-5$.

陰関数微分より

$18yy' = 3(x+5)^2$. $y' = \dfrac{(x+5)^2}{6y} \geqq 0$

なので，y は単調増加である．よって，グラフの対称性，$x=0$ のとき $y = \pm\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$ であることなどに注意してグラフを書くと以下のようになる．



よって y 軸とで囲まれた図形の周の長さは，

$$
\begin{aligned}
&2\int_{-5}^{0}\sqrt{1+(y')^2}\,dx + \frac{5\sqrt{5}}{3}\times 2\\
=&2\int_{-5}^{0}\sqrt{1+\frac{(x+5)^4}{36y^2}}\,dx + \frac{10\sqrt{5}}{3}\\
=&2\int_{-5}^{0}\sqrt{1+\frac{(x+5)^4}{4(x+5)^3}}\,dx + \frac{10\sqrt{5}}{3}\\
=&2\int_{-5}^{0}\sqrt{1+\frac{1}{4}(x+5)}\,dx + \frac{10\sqrt{5}}{3}\\
=&\int_{-5}^{0}\sqrt{x+9}\,dx + \frac{10\sqrt{5}}{3}\\
=&\left[\frac{2}{3}(x+9)^{\frac{3}{2}}\right]_{-5}^{0} + \frac{10\sqrt{5}}{3}\\
=&\frac{2}{3}(9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}) + \frac{10\sqrt{5}}{3}\\
=&\frac{2}{3}(27-8) + \frac{10\sqrt{5}}{3}\\
=&\frac{38+10\sqrt{5}}{3}
\end{aligned}
$$

■

注　とてもうまく計算していることに気づきましたか．それは，y' を求める際に，$y' = \dfrac{(x+5)^2}{6y}$ と y を残したままにしている点です（x だけで表していない）．そうすることで，周の長さの公式で積分内の $\sqrt{1+(y')^2}$ の部分が非常にスムーズに処理できています．もともとの関係式 $9y^2 = (x+5)^3$ を利用しているのです．

注　「y 軸で囲まれた図形の周の長さ」なので y 軸部分も含んでいることに注意しよう．

注　実はもう少しイロイロ調べないと図のようなグラフにはなりません．y'' の符号を調べないと凹凸は分からないし，$\displaystyle\lim_{x\to -5+0} y$ を調べないと $x=-5$ でのグラフの様子が分かりません．今回は周の長さの計算がメインだったのでここまで確認しませんでしたが，各自で必ず確認しておいてください．

$\boxed{58}$　(2)　サイクロイド $x = \theta - \sin\theta$, $y = 1-\cos\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}\right)$ の弧の長さを求めよ．

考え方　サイクロイドは有名な曲線なので図は省略します．教科書や「犬プリ」見といてください．なので，いきなり計算式から始めます．

解

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\\
=&\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}\,d\theta\\
=&\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta\\
=&2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta\\
=&2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta\\
=&2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}2\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta\\
=&2\left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}\\
=&4(2-\sqrt{3})
\end{aligned}
$$

■

59　数直線上で原点から出発し，t 秒後の速度が $v=e^t\sin t$ であるように運動する点 P がある．出発してから 2π 秒の間に P の動いた道のりを求めよ．

考え方　物理選択者には何でもない問題かな？速さ（速度ではない!）を時間で積分すれば道のりが得られます．納得できない人は物理の先生に質問しましょう．

言うまでもなく，速度 $\overrightarrow{v}$ のとき，速さは $|\overrightarrow{v}|$ です．

解　求める道のりは

$$\int_0^{2\pi}|v|\ dt=\int_0^{2\pi}|e^t\sin t|\ dt$$

で求められるので，最初に不定積分 $\int e^t\sin t\ dt$ を計算しておく．

解

$$\begin{aligned}
&\int e^t\sin t\ dt\\
=&\int (e^t)'\sin t\ dt\\
=&e^t\sin t-\int e^t(\sin t)'\ dt\\
=&e^t\sin t-\int e^t\cos t\ dt\\
=&e^t\sin t-\int (e^t)'\cos t\ dt\\
=&e^t\sin t-\left(e^t\cos t-\int e^t(\cos t)'\ dt\right)\\
=&e^t\sin t-\left(e^t\cos t+\int e^t\sin t\ dt\right)\\
=&e^t\sin t-e^t\cos t-\int e^t\sin t\ dt
\end{aligned}$$

ここで，$\int e^t\sin t\ dt=A$ とおくと，

$$\begin{aligned}
A&=e^t\sin t-e^t\cos t-A\\
2A&=e^x(\sin t-\cos t)\\
A&=\frac{e^t}{2}(\sin t-\cos t)
\end{aligned}$$

$$\therefore\int e^t\sin t\ dt=\frac{e^t}{2}(\sin t-\cos t)+C$$

したがって，求める道のりは

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}|e^t\sin t|\ dt\\
=&\int_0^{2\pi}e^t|\sin t|\ dt\\
=&\int_0^{\pi}e^t\sin t\ dt+\int_\pi^{2\pi}(-e^t\sin t)\ dt\\
=&\left[\frac{e^t}{2}(\sin t-\cos t)\right]_0^\pi-\left[\frac{e^t}{2}(\sin t-\cos t)\right]_\pi^{2\pi}\\
=&\frac{1}{2}(e^\pi+1)-\frac{1}{2}(-e^{2\pi}-e^\pi)\\
=&\frac{1}{2}(e^{2\pi}+2e^\pi+1)\\
=&\frac{1}{2}(e^\pi+1)^2
\end{aligned}$$

■

注　言うまでもなく，上の積分計算は
$0\leqq t\leqq\pi$ のとき $\sin t\geqq 0$,
$\pi\leqq t\leqq 2\pi$ のとき $\sin t\leqq 0$,
であることから積分区間を分割して計算しています．

参考　上の解法では不定積分を部分積分法で計算しましたが次のような面白い別解があるので紹介します．

解　まずは，$e^x\sin x$ と $e^x\cos x$ をそれぞれ微分して，

$$(e^x\sin x)'=e^x\sin x+e^x\cos x\quad\cdots①$$
$$(e^x\cos x)'=e^x\cos x-e^x\sin x\quad\cdots②$$

① − ② より，

$$(e^x\sin x-e^x\cos x)'=2e^x\sin x$$
$$\left\{\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)\right\}'=e^x\sin x$$
$$\therefore\int e^x\sin x\ dx=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$$

ちなみに，① + ② を考えると，

$$(e^x\sin x+e^x\cos x)'=2e^x\cos x$$
$$\left\{\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)\right\}'=e^x\cos x$$
$$\therefore\int e^x\cos x\ dx=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+C$$

この方法のすごいところは，$\int e^x\sin x\ dx$ と $\int e^x\cos x\ dx$ が同時に求められるということです．それぞれを別々に部分積分で求めるのはとても時間がかかるので，ぜひともこの方法を覚えておきましょう．

35　演習問題 (5)

基本問題はありません．

36　補足　微分方程式

60　微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=(2y-3)x$ の解を求めよ．また，$x=0$ のとき $y=1$ となるものを求めよ．

考え方　いわゆる「変数分離型微分方程式」です．現時点で，高校数学で扱う微分方程式は全てこのタイプになります．dx と dy をバラバラに独立して扱い，x と dx，y と dy をまとめます．「なぜ dx と dy をバラバラにして良いのか？」「両辺を割る際に 0 でないことの確認は必要じゃないのか？」といった疑問もあるでしょうが，あまり深く考えずに機械的に解くことがポイントです．

解　$\dfrac{dy}{dx}=(2y-3)x$ より，$\dfrac{1}{2y-3}dy=xdx$

$$\int\frac{1}{2y-3}\,dy=\int x\,dx$$

$\dfrac{1}{2}\log|\,2y-3\,|=\dfrac{1}{2}x^2+C$
$\log|\,2y-3\,|=x^2+2C$
$|\,2y-3\,|=e^{x^2+2C}=e^{2C}e^{x^2}$
$2y-3=\pm e^{2C}e^{x^2}=Ae^{x^2}$
($\pm e^{2C}=A$ とおく)
$y=\dfrac{1}{2}(Ae^{x^2}+3)$
$x=0$ のとき $y=1$ だから
$1=\dfrac{A}{2}+\dfrac{3}{2}$ より，$A=-1$
$y=\dfrac{1}{2}(-e^{x^2}+3)$

■

61　正の実数 x で定義された微分可能な関数 $f(x)$ で，次の条件を満たすものを求めよ．
「曲線 $y=f(x)$ の各点 $(x_0,\ f(x_0))$ における接線は x 軸と点 $\left(x_0{}^2+\dfrac{3}{2}x_0,\ 0\right)$ で交わり，かつ，この曲線は点 $(1,\ 9)$ を通る」

考え方　これもあまり深く考えずに，問題文の通りに立式していくだけです．

解　曲線 $y=f(x)$ の各点 $(x_0,\ f(x_0))$ における接線は

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

これが点 $\left(x_0{}^2+\dfrac{3}{2}x_0,\ 0\right)$ を通るので，

$$-f(x_0)=f'(x_0)\left(x_0{}^2+\frac{3}{2}x_0-x_0\right)$$

したがって，x_0 は曲線上の任意の点なので，

$$-y=\frac{dy}{dx}\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)$$

という微分方程式が成立する．
$-\dfrac{1}{y}\,dy=\dfrac{1}{x^2+\frac{1}{2}x}\,dx$
$\dfrac{1}{y}\,dy=\dfrac{-2}{2x^2+x}\,dx$

$$\int\frac{1}{y}\,dy=\int\frac{-2}{x(2x+1)}\,dx$$

$$\int\frac{1}{y}\,dy=\int 2\left(\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x}\right)\,dx$$

$\log|\,y\,|=2(\log|\,2x+1\,|-\log|\,x\,|)+C$
$\log|\,y\,|=2\log\left|\dfrac{2x+1}{x}\right|+C$
$\log|\,y\,|=\log\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^2+\log e^C$
$|\,y\,|=e^C\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^2$
$y=\pm e^C\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^2=A\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^2$
$x=1$ のとき $y=9$ なので，$A=1$．よって，
$y=\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^2$．

■

以上で，オリスタ基本問題全問の解説を終わります．
ホームページでも書いてますが，オリスタは、数学 Ⅲ 分野の最良の問題集だと思います。難易度も基礎から応用まで幅広く、この問題集をきっちりと仕上げれば、数学 Ⅲ に関しては完璧でしょう。特に、演習問題は最高難度の問題ぞろいで、このレベルの問題が解ければ、どこの大学にも自信を持っての臨めるはずです。
特にこの『基本問題』は、4STEP レベルの標準問題ばかりです．これらの問題を解くことで、基礎事項の確認と復習ができます。まずはこの『基本問題』をクリアしないことには、入試問題は解けないのでしっかりとマスターしておくこと．2 学期の授業は,『基本問題』の内容は完全に理解できているものとして，いきなり A 問題からスタートするので，そのつもりで授業に臨んでください．