別解募集中

ひとつの問題を様々な角度から見て，別解を考えることは，とても良い勉強になります．次の問題は多くの別解がある有名問題です．

> **例 題** 任意の正の数 a，b に対して，つねに
>
> $$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqq k\sqrt{a+b} \quad \cdots\cdots (※)$$
>
> が成り立つような実数 k の最小値を求めよ．

ざっと思いつくだけで全部で 8 通りの解法があります．優先順位の高い解法 (他でも役に立つ有効な解法) から順番に紹介しよう．中には「そんなん絶対に思いつかんやろ」というマニアックな解法もあるので，全部をマスターする必要はありませんが，まあ頭の片隅にあるといつか役に立つこともあるかもしれません．

1　2 次関数に帰着

ややメンドウですが，2 乗して，置き換えし，2 次関数に持ち込む方法が確実な方法です．文系諸君はこの方法がベストだと思います．

解　不等式 (※) の両辺は正なので，両辺を 2 乗して

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \leqq k^2(a+b)$$

$$a+2\sqrt{ab}+b \leqq k^2(a+b)$$

両辺を $b>0$ で割って，

$$\frac{a}{b}+2\sqrt{\frac{a}{b}}+1 \leqq k^2\left(\frac{a}{b}+1\right)$$

ここで，$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=t$ とおくと

$$t^2+2t+1 \leqq k^2(t^2+1)$$

$$(k^2-1)t^2-2t+k^2-1 \geqq 0 \cdots\cdots ①$$

a，b が任意の正の数を動くとき，t も任意の正の数を動くので，不等式 ① が任意の正の数 t で成立するときの k の条件を考えればよい．

① の右辺を $f(t)$ とおく．

$k^2-1=0$ のとき，$f(t)=-2t$ は原点を通る傾きが負の直線になるので，任意の $t>0$ において $f(t) \geqq 0$ とはならない．

$k^2-1<0$ のとき，$f(t)$ は上に凸である放物線なので，任意の $t>0$ において $f(t) \geqq 0$ とはならない．

よって，$k^2-1>0$ であることが必要である．

このとき，2 次関数 $f(t)$ の軸は正であるから，求める条件は $f(t)=0$ の判別式を D とすると，$D \leqq 0$.

よって，$1-(k^2-1)(k^2-1) \leqq 0$ より，$k^4-2k^2 \geqq 0$

$k^2(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2}) \geqq 0$.

明らかに $k>0$ なので，$k \geqq \sqrt{2}$.

したがって，求める k の最小値は $\sqrt{2}$

■

2　数学 Ⅲ の利用

理系諸君は数学 Ⅲ が使えるので，チカラワザで乗り切ることも可能です．

解　不等式 (※) より

$$k \geqq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} = \frac{\sqrt{\dfrac{a}{b}}+1}{\sqrt{\dfrac{a}{b}+1}}$$

$\dfrac{a}{b}=x$ とおくと，$k \geqq \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}}$

ここで $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}}$ とおく．

a，b が任意の正の数を動くとき，x も任意の正の数を動く．

よって，不等式 (※) が任意の正の数 x で成立するための条件は，$f(x)$ の最大値を M とするとき，$k \geqq M$ であることなので

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}} - \frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}\right) = \frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}(x+1)}$$

$f(x)$ は $x=1$ で極大かつ最大になるので，

$M = f(1) = \sqrt{2}$

よって，不等式 (※) がつねに成り立つ条件は，$k \geqq \sqrt{2}$ なので，実数 k の最小値は $\sqrt{2}$.

■

✎注　$x = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ とおいて，$k \geqq \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ として考えてもかまいませんが，微分の計算がほんの少し違うだけであんまり大差ありません.

3　図形的に考える

図形的に考えることは様々な場面で役に立つ重要な考え方です.

解　$\sqrt{a} = x$, $\sqrt{b} = y$ とおく.

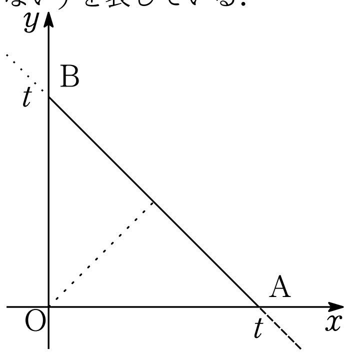
このとき，不等式 (※) より，

$$x + y \leqq k\sqrt{x^2+y^2}$$

$x + y = t$ とおくと，

$$x + y = t, \quad \text{かつ} \quad \sqrt{x^2+y^2} \geqq \frac{t}{k}$$

$x > 0$, $y > 0$ より，$t > 0$, $k > 0$ なので，t を固定して考えると，$x + y = t$ は下図の線分 AB(両端は含まない) を表している.



また，$\sqrt{x^2+y^2}$ は点 $(x,\ y)$ と原点からの距離を表しており，この線分上の点 $(x,\ y)$ で原点からの距離の最小値は，原点 O から線分 AB におろした垂線の足のときなので $\dfrac{t}{\sqrt{2}}$.

よって，$\sqrt{x^2+y^2} \geqq \dfrac{t}{k}$ が常に成立するのは

$$\frac{t}{\sqrt{2}} \geqq \frac{t}{k}$$

のときなので，$k \geqq \sqrt{2}$.

したがって，求める k の最小値は $\sqrt{2}$

■

4　相加相乗平均の利用

ここからだんだんマニアックになってきます.

解　不等式 (※) の両辺は正なので，両辺を 2 乗して

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \leqq k^2(a+b)$$

$$a + 2\sqrt{ab} + b \leqq k^2(a+b)$$

$$k^2 \geqq \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b} = 1 + \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$$

ここで，$a > 0$, $b > 0$ なので相加相乗平均の大小関係より

$$a + b \geqq 2\sqrt{ab} \iff 1 \geqq \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$$

よって，$k^2 \geqq \dfrac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b}$ がつねに成り立つ条件は

$$k^2 \geqq 2$$

$k > 0$ より，$k \geqq \sqrt{2}$.

したがって，求める k の最小値は $\sqrt{2}$

■

✎注　相加相乗平均を利用する方法として次のような解答もあります．最初は「2 次関数の利用」と全く同じです.

解　不等式 (※) の両辺は正なので，両辺を 2 乗して

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \leqq k^2(a+b)$$

$$a + 2\sqrt{ab} + b \leqq k^2(a+b)$$

両辺を $b > 0$ で割って，

$$\frac{a}{b} + 2\sqrt{\frac{a}{b}} + 1 \leqq k^2\left(\frac{a}{b} + 1\right)$$

ここで，$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = t$ とおくと

$$t^2 + 2t + 1 \leqq k^2(t^2+1)$$

$$k^2 \geqq \frac{t^2+2t+1}{t^2+1} = 1 + \frac{2t}{t^2+1} = 1 + \frac{2}{t + \dfrac{1}{t}}$$

$t > 0$ なので相加相乗平均の大小関係より

$$t + \frac{1}{t} \geqq 2 \iff 1 \geqq \frac{2}{t + \dfrac{1}{t}}$$

よって，$k^2 \geqq \dfrac{t^2+2t+1}{t^2+1}$ がつねに成り立つ条件は

$$k^2 \geqq 2$$

$k>0$ より，$k \geqq \sqrt{2}$.

したがって，求める k の最小値は $\sqrt{2}$

■

5　コーシーシュワルツの不等式の利用

「コーシーシュワルツの不等式」とは次のようなものです．

▷Point◁

次の不等式が成立する．

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$$

(等号成立は $a:b=x:y$ のとき)

(左辺) − (右辺) = $(ay-bx)^2$ になるので，これで証明終わりですが，一般にはベクトル的な発想で証明するのがフツーです．

証明

$\overrightarrow{p}=(a,\ b)$，$\overrightarrow{q}=(x,\ y)$ とおくと，

$a^2+b^2=\left|\overrightarrow{p}\right|^2$，$x^2+y^2=\left|\overrightarrow{q}\right|^2$，

$(ax+by)^2=\left(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q}\right)^2=\left|\overrightarrow{p}\right|^2\left|\overrightarrow{q}\right|^2\cos^2\theta$

なので，

$$\begin{aligned}&(\text{左辺})-(\text{右辺})\\&=\left|\overrightarrow{p}\right|^2\left|\overrightarrow{q}\right|^2-\left|\overrightarrow{p}\right|^2\left|\overrightarrow{q}\right|^2\cos^2\theta\\&=\left|\overrightarrow{p}\right|^2\left|\overrightarrow{q}\right|^2(1-\cos^2\theta)\geqq 0\end{aligned}$$

等号成立は $\cos\theta=\pm 1$, すなわち, $\theta=0^\circ$, 180° のときで, このとき, $\overrightarrow{p}\ /\!/\ \overrightarrow{q}$．つまり, $a:b=x:y$.

■

注　この証明をそのまま空間ベクトルの場合に適用すれば次の不等式が成立することもわかります。

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$$

(等号成立は $a:b:c=x:y:z$ のとき)

さて，コーシーシュワルツの不等式をうまく適用することで解くことができます。

解　不等式 (※) の両辺は正なので，両辺を 2 乗して

$$k^2(a+b) \geqq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

ここで，コーシーシュワルツの不等式より

$$(1^2+1^2)((\sqrt{a})^2+\left(\sqrt{b}\right)^2) \geqq (1\cdot\sqrt{a}+1\cdot\sqrt{b})^2$$

(等号成立は $a=b$ のとき) なので

$$2(a+b) \geqq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

不等式 (※) が常に成立するための条件は，$k^2 \geqq 2$

$k>0$ より，$k \geqq \sqrt{2}$.

したがって，求める k の最小値は $\sqrt{2}$

■

6　三角関数に置き換える

思いもつかないかもしれませんが，三角関数を利用する方法もあります．

解　不等式 (※) より，$k \geqq \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$

ここで，$\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}\right)^2=1$ なので，

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}=\cos\theta,\quad \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}=\sin\theta,$$

とおける．$\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$$

よって，$k \geqq \sqrt{2}$ なので，実数 k の最小値は $\sqrt{2}$.

■

注　2015 年の阪大で次の問題が出題されました．

実数 x，y が，$|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$ を満たすとき，不等式

$$0 \leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

が成り立つことを証明せよ．

[2015 年大阪大学 (前期) 文理共通問題]

この問題は，条件 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$ から

$$x = \cos\theta, \qquad y = \sin\theta$$

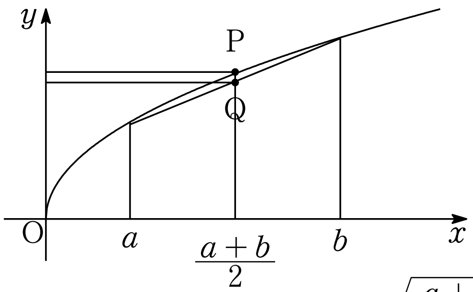
と置き換えすることがポイントで，あとは機械的な計算で証明ができてしまいます．「三角関数に置き換えよう」という発想がないとかなり厳しい問題です．ちなみに，私のクラスでこの年に阪大に受かったN君にどうだったか尋ねたところ「もちろん三角関数で置き換えましたよ」と答えました．やっぱり思いつく人はウカルんですね．

注　「ウカル人は思いつく」とは言ってませんよ．

7　グラフの凸性

グラフの凹凸の様子に注目して証明する方法もあります．

解　$y = \sqrt{x}$ のグラフは上に凸である．



よって，図中の点 P の y 座標 $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$ の方が点 Q の y 座標 $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$ よりも大きい．

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leqq \sqrt{\frac{a+b}{2}}$$

(等号成立は $a = b$ のとき)

$$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b} \leqq \sqrt{2}\sqrt{a+b}$$

したがって不等式 (※) が常に成り立つ条件は $\sqrt{2} \leqq k$ なので，実数 k の最小値は $\sqrt{2}$．

■

注　$y = \sqrt{x}$ のグラフが上に凸であることは，厳密には第 2 次導関数 $y'' < 0$ であることを示す必要があります．

8　必要条件から k の範囲をうまく絞り込む

最後は，テキトーに数字を代入して「必要条件」を考え，それが「十分条件」であることを示すという方法です．

解　任意の正の数 a，b で不等式 (※) 成り立つためには，$a = b = 1$ でも成り立つ必要がある．よって，$a = b = 1$ を代入して

$$\sqrt{1}+\sqrt{1} \leqq k\sqrt{1+1} \qquad \therefore\ \sqrt{2} \leqq k$$

よって，k の最小値は $\sqrt{2}$ 以上であることが必要．

逆に $k = \sqrt{2}$ のとき

$$(\sqrt{2}\sqrt{a+b})^2 - (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$$

より，$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqq \sqrt{2}\sqrt{a+b}$ となり，不等式 (※) は常に成り立つ．(十分条件)

したがって，求める k の最小値は $\sqrt{2}$

■

注　この解答を示すと必ず「なんで，$a = b = 1$ を代入しようと思ったんですか」という質問 (クレーム？) が後を絶ちません．確かに，他の数字だと $k = \sqrt{2}$ が出てこないので，実に不思議な思いつきです．「テキトーに代入したら，それらしい数字が見つかった．で，確認したらその数字が正しかった」では納得できませんよね．おそらく，別の解法ですでに答えを知っている人が，無理やりその答えに合わすために (その答えが出てくるように) 都合よく代入する数字を選んだのでしょう．そうしておきましょう．

最後に，次の問題を紹介しておこう．

> すべての正の実数 x，y に対して，つねに
>
> $$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{2x+y}$$
>
> が成り立つような実数 k の最小値を求めよ．
>
> [1995 年東京大学 (前期) 文理共通問題]

例題 とほとんど同じですが，対称性がやや崩れています．なので，先ほどの 8 通りの解法が全てできるかどうか分かりません．どの解法が使えて，どの解法が使えないのか各自で試してください．