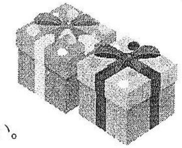
完全順列（モンモールの問題）

モンモールとは
フランスの数学者
のことです。

次の問題を考えてみよう。こんな状況に出くわすこともあるかもしれません。

> あるパーティー会場での出来事。３人の出席者が、
> 持ってきたプレゼントをお互いに交換し合うことにしました。
> 自分の持ってきたプレゼントは必ず自分以外の人に渡すとするとき、
> プレゼントの交換方法は何通りあるでしょうか。
> また、４人で交換し合う場合、５人で交換し合う場合も考えてください。



プレゼントほし〜い

とりあえずは、具体的に書き出して考えるしかなさそうです。

３人で交換し合う場合

３人をA，B，Cとし、それぞれの持ってきたプレゼントをａ，ｂ，ｃとすると、求める場合の数は、Aのところにａが並ばず、Bのところにｂが並ばず、Cのところにｃが並ばないような順列の個数である、したがって、次の２通りである。

```
A  B  C
b－c－a
c－a－b
```

ふ〜ん
たった２通りしか
ないのか…

４人で交換し合う場合

４人をA，B，C，Dとし、それぞれの持ってきたプレゼントをａ，ｂ，ｃ，ｄとする。
３人の場合と同様に考えると、次の９通りある。

```
A  B  C  D
b－a－d－c
   ＼c－d－a
   ＼d－a－c
c－a－d－b
   ＼d－a－b
      ＼b－a
d－a－b－c
   ＼c－a－b
      ＼b－a
```

落ち着いて
書き出そう。

数えもれが
ないよーに

５人で交換し合う場合

５人をA，B，C，D，Eとし、それぞれの持ってきたプレゼントをａ，ｂ，ｃ，ｄ，ｅとする。
これまでと同様に考えるが、少し工夫して数えてみよう。

まず、Aはａ以外（つまりｂ，ｃ，ｄ，ｅ）の４通りのプレゼントの取り方がある。

```
A   B   C   D   E
↑
a以外の４通り
```

いま、Aがプレゼントｂを取った場合を考えよう。
このとき、残りの４人（B，C，D，E）がプレゼント（ａ，ｃ，ｄ，ｅ）を交換し合うことになる。

（１）　Bがａを取る場合
残りの３人C，D，Eがお互いにプレゼント（ｃ，ｄ，ｅ）を交換することになるので、３人の場合の交換方法の総数に等しく、２通り。

```
A  B  C  D  E
b－a－d－e－c
     ＼e－c－d
```

結局，C，D，Eの
３人の間で
交換するだけ

ナルホド〜

（２）　Bがａ以外を取る場合
４人B，C，D，Eが、プレゼントａ，ｃ，ｄ，ｅを

B　→　ａ以外を取る
C　→　ｃ以外を取る
D　→　ｄ以外を取る
E　→　ｅ以外を取る

ａをｂに置き換えて
考えてみると
わかりやすいかも…

という条件で交換し合うことになるので、この場合の数は、４人の場合の交換方法そのものである。つまり、９通り。

よって、Aがプレゼントｂを取った場合の交換方法は、合計　２＋９＝１１通り。
Aが他のプレゼントｃ，ｄ，ｅを取った場合も同様に考えて（※注意）、２＋９＝１１通りになる。
したがって、求める場合の数は、４×（２＋９）＝４４通り。

Aが取るプレゼントは４通りある

（※注意）
Aがプレゼントｃを取った場合は、Cがａを取る場合と取らない場合で考えます。
Aがプレゼントｄを取った場合は、Dがａを取る場合と取らない場合で考えます。
Aがプレゼントｅを取った場合は、Eがａを取る場合と取らない場合で考えます。
→こういう意味で、「同様に考えて」となっているのです。

（参考）Aがプレゼントｂを取った場合を全て書き出すと右のようになります。
　確かに３人の場合の交換方法の総数と４人の場合の交換方法の総数の和になっています。

```
A  B  C  D  E
b－a－d－e－c  ┐ ３人で配る
 ＼    ＼e－c－d  ┘ 場合と同じ
  c－a－e－d  ┐
     ＼d－e－a  │
     ＼e－a－d  │
  d－a－e－c  │ ４人で配る
     ＼e－a－c  │ 場合と同じ
        ＼c－a  │
  e－a－c－d  │
     ＼d－a－c  │
        ＼c－a  ┘
```

⇒ ２＋９＝１１通り．

このような順列を『完全順列（または攪乱（かくらん）順列）』といいます。
完全順列の定義はいろいろありますが、要するに、**横１列に並んだｎ個の順列を並べ替えたときに、全ての位置が変わっているような順列のこと**です。

一般的に、ｎ個の完全順列の総数を a_n とするとき、次の漸化式が成立します。

$$a_{n+2} = (n+1)(a_{n+1} + a_n)$$

「なぜ、こんな漸化式が成立するのか？」
「この漸化式を解いて、一般項 a_n を求めることができるのか？」　・・・などなど、
疑問点は残りますが、詳しくは次回の犬プリで解説します。
とりあえずは、ｎ＝５の場合をしっかりと理解してください。

この漸化式を使えば、
６人で交換し合う場合の数は．$\underbrace{a_6}_{n=4として} = 5(a_5 + a_4) = 5(44+9) = \underline{265通り}$〃