行列超特急

2行2列の行列限定で重要ポイントをまとめておくよ

単位行列 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$，零行列 $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$ とする．

1 行列特有の性質

▷Point◁(成分計算の基本)

① 行列の加法・減法(各成分別に計算するだけ)

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\pm p&b\pm q\\c\pm r&d\pm s\end{pmatrix}$$

② 行列の実数倍(各成分を実数倍)

$$k\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka&kb\\kc&kd\end{pmatrix}$$

③ 行と列の乗法

$$\begin{pmatrix}a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=ax+by$$

行と列のかけざんになってます。

④ 行列の乗法

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ap+br&aq+bs\\cp+dr&cq+ds\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$$

1次変換でよく登場するよ

行列の計算については，普通の文字式のように展開することができます．例えば，

$(A+B)(C+D)=AC+AD+BC+BD$

しかし，$XY=YX$ は一般には成り立たないので積の順番(左右)を変更できません．だから，

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$$

を「$A^2+2AB+B^2$」とまとめることはできません．しかし，単位行列 E と零行列 O は常に交換可能(つまり，$AE=EA=A$，$AO=OA=O$)であり，また，何乗してもそのまま($E^n=E$，$O^n=O$)なので，E を含む式の場合は，

$(A+E)^3=A^3+3A^2+3A+E$

フムフム

などと普通に展開できます．

なお，結合法則 $(AB)C=A(BC)$ は成立するので，積はどこから計算しても結果は同じです．

重要☆

また，$AB=O$ であっても，$A=O$ または $B=O$ とは限りません．つまり，$A\neq O$ かつ $B\neq O$ でも，$AB=O$ となることがあります．

▷Point◁(行列特有の性質)

・積の順序(左右)を勝手に変えてはいけない．

・$AB=O$ だからといって，

$A=O$ または $B=O$ とは限らない．

例えば，$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ のとき $AB=O$ ですが $A\neq O$，$B\neq O$ です。また $AB\neq BA$ です。

たしかにそうやな　ナットク!!

2 逆行列

行列 A に対して，$AX=E$，$XA=E$ をともにみたす行列 X が存在するとき，X を行列 A の逆行列といい，記号 A^{-1} で表します． ← 割り算みたいなもんやけど

A^{-1} を $\frac{1}{A}$ とは書きません。

条件が2つありますが，$AX=E$，$XA=E$ の一方が成り立てば他方も成り立ちます．つまり，

$AX=E$ ならば $XA=E$ も成立し，$X=A^{-1}$

$XA=E$ ならば $AX=E$ も成立し，$X=A^{-1}$

⇨注　この事実は証明せずに用いてかまいません．

逆行列を具体的に求めるには，次の公式を使います．この関係はしっかりと頭に入れておこう．

▷Point◁(逆行列)

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ に対して，

$ad-bc\neq 0$ のとき，逆行列 A^{-1} は存在し，

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

証明は教科書みといて

$ad-bc=0$ のとき，逆行列 A^{-1} は存在しない．

$\frac{1}{ad-bc}$ を忘れないよーに

OK

A^{-1}，B^{-1} が存在するとき，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ です．証明方法が重要．以下の証明では両辺に行列をかける時，どちらの方向からかけるのかいちいち断っていることを意識しよう．

【証明】AB の逆行列を X とすると，$ABX=E$．両辺に左から A^{-1} をかけて，$BX=A^{-1}$．さらに左から B^{-1} をかけて，$X=B^{-1}A^{-1}$．よって，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$．■

$ad-bc$ を行列 A の行列式(determinant)といい，$\det(A)$，$|A|$ などと表します．つまり，

▷Point◁(逆行列の有無)

$\det(A)\neq 0$ ならば，逆行列が存在する

$\det(A)=0$ ならば，逆行列は存在しない．

さて，逆行列に関する証明問題も重要です．

証明キラ〜イ

▷Point◁(逆行列の証明問題)

逆行列が存在しないことの証明方法

方法① $\det(A)=0$ を示す．

方法② 背理法による．逆行列が存在する(つまり，$\det(A)\neq 0$)と仮定して矛盾を導く．

▷Point◁(逆行列の証明問題)

逆行列が存在することの証明方法

方法① $\det A\neq 0$ を示す．

方法② 背理法による．逆行列が存在しない(つまり，$\det(A)=0$)と仮定して矛盾を導く．

方法③ 逆行列を実際に作ってみせる．

方法③について．例えば「$A+AB=E$ ならば A は逆行列をもつことを証明せよ」と言われたら，$AX=E$ または $XA=E$ となる X を実際に作ってみせればよいのです．この場合，$A(E+B)=E$ と因数分解できるので，A は逆行列 $E+B$ をもつことが分かります．これで証明終．

フ〜ン これでエエのか…

3 ケーリー・ハミルトンの定理

▷Point◁

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ のとき，

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

が成立する．　証明は教科書みといて〜

ケーリー・ハミルトンの定理(以下，C-H 定理)について重要なことは，逆は成立しないということです．例えば，$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$ のとき，C-H 定理より，$A^2-5A+6E=O$ が成立しますが，逆に，$A^2-5A+6E=O$ をみたす行列 A は，$\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$ 以外にも存在します．$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$ などです．

だから，$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ が $A^2-5A+6E=O$ という関係式をみたすとき，C-H 定理より得られる $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ という式と係数を比較して，$a+d=5$，$ad-bc=6$ としてはいけません．$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$ の場合は，$a+d=5$，$ad-bc=6$ をみたしていません．

確かに!!

また，C-H 定理は $A^2=(a+d)A-(ad-bc)E$ と変形して，次数下げの公式としても用いられます．例えば，$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$ のとき，C-H 定理より，$A^2-4A-E=O$ なので $A^2=4A+E$．よって，

$$A^3=A\cdot A^2=A(4A+E)=4A^2+A=4(4A+E)+A=17A+4E$$

$$A^4=A\cdot A^3=A(17A+4E)=17A^2+4A=17(4A+E)+4A=72A+17E$$

このように，C-H 定理を利用して次数をどんどん下げることができ，A^n が A の1次式 $pA+qE$ の形に変形できることがわかります．そこで，登場するのが次の関係です．とても重要です．

▷Point◁(頻出かつ超重要性質)

$pA+qE=O$ という関係があるとき，

$p=0$ のとき，$qE=O$ なので $q=0$．

$p\neq 0$ のとき，$A=-\dfrac{q}{p}E=kE$．

チョー大切

⇨注　$p\neq 0$ のときの扱いに注意しよう．

$pA+qE=O$ より $pA=-qE$．$p\neq 0$ なので両辺を p で割って $A=-\dfrac{q}{p}E$．ここで，$-\dfrac{q}{p}=k$ とおくと，$A=kE$．つまり，A が単位行列の実数倍の形であることを意味しています．

$A^2=O$ ならば A は逆行列をもたない．　有名問題

解1　$A^2=(a+d)A-(ad-bc)E=O$ より，$(a+d)A=(ad-bc)E$

$a+d=0$ のとき，$ad-bc=0$ なので A は逆行列をもたない．

$a+d\neq 0$ のとき，$A=kE$ となるので，$A^2=k^2E=O$．よって $k=0$ より $A=O$．$ad-bc=0$ なので A は逆行列をもたない．■

解2　A^{-1} が存在したと仮定する．$A^2=O$ の両辺に左から A^{-1} を2回かけると，$E=O$ となり矛盾．よって，A は逆行列をもたない．■

⇨注　一般に「$A^n=O$ ならば A は逆行列をもたない」が成立しますが，これだと，解1 の方法では無理です(解2 の方法だと大丈夫)．

$\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$ ← 証明も各自で．

という有名な公式を利用すれば一瞬で証明できます．どうすればよいのかは各自で考えてください．

ヒント　$\det(A^n)=\{\det(A)\}^n$