種数 1 の保型関数体の
重さ 1 の cusp form について

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻
赤阪 正純

平成 17 年 2 月 4 日

1 Introduction

この論文では，合同部分群 $\Gamma_0(N)$ に関する weight 1 の cusp form の空間 $S_1(\Gamma_0(N),\chi)$ の次元を，Dedekind の η 関数を用いて計算した．χ は，$\Gamma_0(N)$ の指標で，η 関数の変換公式から導かれる．ここで扱う level N は，保型関数体の種数が 1 となる場合，即ち $N = 11$, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 24, 27, 32, 36, 49 の 12 個とする．

Dedekind の η 関数とは次のように無限積の形で定義される．

$$\eta(z) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) \qquad (q = e^{2\pi iz})$$

ここで z は複素上半平面 $\mathfrak{H}$ 上にとる．$|q| < 1$ となるので $\sum_{n=1}^{\infty} |q^n|$ は収束し，右辺の無限積は広義一様に絶対収束する．従って $\eta(z)$ は $\mathfrak{H}$ 上の解析関数で $\mathfrak{H}$ 上に零点を持たない．

本論文では，η 関数を用いて，$\Gamma_0(N)$ に関する weight 1 および weight 2 の cusp form を具体的に構成した．η 関数を用いる利点は，このように解析的に都合の良い性質を持っていること，Rademacher 等によって示されているように $SL(2,\mathbb{Z})$ に関する変換公式が具体的に与えられていること，また，Fourier 係数に見られる数論的性質が 2 次体の整数論と深く関わっていること，などがあげられる．

$\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ とおく．このとき，商空間 $\Gamma_0(N) \setminus \mathfrak{H}^*$ は compact な Riemann 面になる．この Riemann 面の種数が 1 となる N は，$N = 11$, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 24, 27, 32, 36, 49 の 12 個である．$N = mn$ なる正整数 m, n に対して，$\eta(mz)\eta(nz)$ を考える．この関数は，η 関数の変換公式 (定理 3.2.5) より，$\Gamma_0(N)$ のある指標 χ に関する weight 1 の modular form になる (3.3 章)．更に，$\Gamma_0(N)$ での cusp における展開を計算することにより，weight 1 の cusp form になることがわかる (4.2 章)．すなわち，

$$\eta(mz)\eta(nz) \in S_1(\Gamma_0(N),\chi)$$

である．weight 1 の cusp form の次元については，具体的に知られていない場合も多い．また，これまで，weight 1 の cusp form について研究されてきた指標 χ は，次のような，mod N で定まる Dirichlet 指標 χ_0 (ただし $\chi_0(-1) = -1$) のことが多かった．

$$\chi\begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} = \chi_0(d)$$

例えば，ϑ 関数から作られる weight 1 の modular form や，Deligne-Serre の定理に観られる，weight 1 の cusp form などはすべて mod N で定まる Dirichlet 指標を対象としている．今回の $\eta(mz)\eta(nz)$ の場合，その指標 χ はこのタイプではない．これらの指標について詳しく調べ，weight 1 の cusp form を具体的に構成し，その空間の次元を決定していった．$N = 11$, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 24, 27, 32, 36, 49 の場合において，$\dim S_2(\Gamma_0(N)) = 1$ であること，$\chi(-1) \neq -1$ ならば $\dim S_1(\Gamma_0(N),\chi) = 0$ となることを用いた．次の表の結果を得た．

主 結 果 (5 章 定理 5.8.3)

種数 1 の 保型関数体の weight 1 の cusp form の次元

lebel N	11,27,20,32,36	15	17	19	14	24	21	49
χ の位数	2	6	4	6	8	12	12	12
dim $S_1(\Gamma_0(N))$	0	0	0	0	0	0	0	0
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^1)$	1	1	≥ 1	≥ 1	1	1	≥ 1	≥ 1
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^2)$		0	0	0	0	0	0	0
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^3)$		0	≤ 1	≤ 1	1	1	??	??
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^4)$		0		0	0	0	0	0
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^5)$		1		≤ 1	1	1	≤ 1	≤ 1
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^6)$					0	0	0	0
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^7)$					1	1	≥ 1	≥ 1
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^8)$						0	0	0
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^9)$						1	??	??
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^{10})$						0	0	0
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^{11})$						1	≤ 1	0

表中の [??] 部分は決定することはできなかった．また，不等号のままで終わっている箇所もあり，次元を完全に決定するには至らなかった．しかし，計算機による観察を行ない (8 章)，これら不明に終わっている箇所については, いくつか「予想」を与えた (5 章).

weight 2 の cusp form の構成については次のように考察した.

まず，$N = 11, 14, 15, 20, 24, 27, 32, 36$ の場合，N の正の約数の組，a, b, c, d で $a+b+c+d = 24$ となるものが取れる．このとき，$\eta(az)\eta(bz)\eta(cz)\eta(dz)$ は $\Gamma_0(N)$ に関する weight 2 の cusp form になる (命題 4.1.1)．今，$S_2(\Gamma_0(N))$ の次元は 1 だから, この $\eta(az)\eta(bz)\eta(cz)\eta(dz)$ が，$S_2(\Gamma_0(N))$ の基底となる．しかし，残りの $N = 17, 19, 21, 49$ の場合については，このように単純に η 関数を組み合わせただけでは weight 2 の cusp form を構成することはできない.

$N = 11, 14, 15, 20, 24, 27, 32, 36$ の各場合について，weight 2 の cusp form を 2 つに分けて，weight 1 の cusp form を 2 つ作り，その様子を観察することから始めた．η 関数 4 つの積を 2 つに分解する方法は数通りあるが，それらの中から，η 関数 2 つの積に，Hecke operator を作用させ，Hecke eigenform がうまく構成できるような組み合わせを考えた．$N = 17, 19, 21, 49$ の場合に対しても，Hecke eigenform をうまく構成し，計算機による実験の結果，weight 2 の cusp form を構成してみた (8 章)．この点に関してはあくまでも予想であり，証明はまだなされていない．今後の研究課題として証明に取り組んで行きたい.

9 章では weight 1 の cusp form と Artin L 関数との関わりについて述べた，Deligne-Serre の定理について触れた．はじめに述べたように考えている指標が, mod N で定まる Dirichlet 指標ではないが，η 関数の積で構成した weight 1 の Hecke eigenform f の定める Dirichlet 級数 $L(s, f)$ が，虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-N})$ のイデアル類群に対する Hecke L 関数に等しいことを計算結果から予想した．それらが，$\mathbb{Q}$ 上の Artin L 関数として表されることまでは，まだ証明できていない.

大学院入学以後，山本芳彦先生に熱心に指導していただきました．山本芳彦先生は長い闘病生活の中で，η 関数の積の数論的な性質について研究されておられました．weight 2 の cusp form を η 関数だけでどの程度まで構成できるのかという問題に対し，まず η 関数で weight 1 の cusp form を構成し，それをさらに Hecke operator で変換して，かけ合わせることで weight 2 の cusp form が得られるのではないか，というアイデアを持っておられました．今論文では，特に種数 1 の場合について考察をしてきましたが，これは山本芳彦先生の研究に基づくものです．

山本芳彦先生は，昨秋，お亡くなりになられました．その後は，伊吹山知義先生に指導教官になっていただき，研究を続けてまいりました．落合　理先生には適切な助言をいただきました．小川裕之先生，今野秀二先生にも丁寧に指導していただき，大変お世話になりました．最後になりますが，お世話になりました先生方に，あらためて御礼申し上げます．

目 次

2　準備

この章では，準備として，複素上半平面の諸性質，第1種 Fuchs 群，などについて述べる．なお，以下の記号は，本論中，説明を加えずに用いるので，あらかじめ説明しておく．

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ をそれぞれ，複素数体，実数体，有理数体，有理整数環とする．

$z \in \mathbb{C}$ のとき，$\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ で，それぞれ，複素数 z の実部，虚部を表す．

$M_2(\mathbb{R}), M_2(\mathbb{Z})$ でそれぞれ，$\mathbb{R}$ 係数, $\mathbb{Z}$ 係数 2 次正方行列を表す．I は単位行列，${}^tA$ は A の転置行列，$\det A$ は A の行列式を表すとする．また，$M_2(\mathbb{R})$ の部分集合を，それぞれ，

$$\begin{aligned} GL(2,\mathbb{R}) &= \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\} \\ GL^+(2,\mathbb{R}) &= \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\} \\ SL(2,\mathbb{R}) &= \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\} \\ SL(2,\mathbb{Z}) &= \{A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det A = 1\} \\ SO(2,\mathbb{R}) &= \left\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1,\ {}^tAA = I\right\} \end{aligned}$$

とする．これらは，行列の積に関して群をなす．

また，$GL(2,\mathbb{R})$ の中心を $\mathbb{R}^\times \cdot 1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^\times \right\}$ と表す．

これ以外の記号については，随時，説明を加えることにする．

2.1　複素上半平面 $\mathfrak{H}$ の諸性質

単連結 1 次元複素多様体を Riemann 面という．Riemann 面は

1. Riemann 球面 $P = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
2. Gauss 平面 $\mathbb{C}$
3. 単位円の内部 K

のいずれかひとつと解析的に同型であることが知られている (岩澤 [5]p.195).

複素上半平面 (complex upper plane)$\mathfrak{H}$ を

$$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

と定義する．このとき次の命題が成立する．

命題 2.1.1
単位円の内部 K と複素上半平面 $\mathfrak{H}$ は解析的に同型である．

証明
$\mathfrak{H}$ から K への写像 $\rho : \mathfrak{H} \ni z \longmapsto w \in K$ を次のように定義する．

$$w = \rho(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

このとき，$\rho(i)=0$ であり，$\rho^{-1}:K\longrightarrow\mathfrak{H}$ は,

$$z=\rho^{-1}(w)=i\ \frac{1+w}{1-w}$$

となる．

$$\begin{aligned} z\in\mathfrak{H} \quad &\Longrightarrow \quad |w|=|\rho(z)|=\frac{|z-i|}{|z+i|}<1 \\ w\in K \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(\rho^{-1}(w))=\frac{1-|w|^2}{|1-w|^2}>0 \end{aligned}$$

であるので，単位円の内部 K と複素上半平面 $\mathfrak{H}$ は解析的に同型であることがわかる． $\square$

本論文では主に，この複素上半平面 $\mathfrak{H}$ 上で定義された関数を考察する．そのためにまず，$\mathfrak{H}$ の解析的自己同型群について考えることにする．

$\mathfrak{H}$ の解析的自己同型の全体の作る群を $\mathrm{Aut}(\mathfrak{H})$ で表す．このとき，次の定理が成立する．

定理 2.1.2

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{H})\cong GL^+(2,\mathbb{R})/\{\mathbb{R}^\times\cdot 1\}\cong SL(2,\mathbb{R})/\{\pm I\}$$

証明
$\alpha=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in GL(2,\mathbb{R})$ とすれば，$z\in\mathfrak{H}$ に対して，

$$\mathrm{Im}(\alpha z)=\frac{\det(\alpha)\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

が成立するので，$\det(\alpha)>0$ ならば, $\mathrm{Im}(\alpha z)>0$ で, $z\longmapsto\alpha z$ は $\mathfrak{H}$ 上の自己同型である．そこで，$\alpha\in GL^+(2,\mathbb{R})$ に対し，$\iota(\alpha)$ で $\mathfrak{H}$ の自己同型 $z\longmapsto\alpha z$ を表すと，

$$GL^+(2,\mathbb{R})\ni\alpha\longmapsto\iota(\alpha)\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{H})$$

は，群の順同型であり，特に，ι は，$SL(2,\mathbb{R})$ から $\mathrm{Aut}(\mathfrak{H})$ への順同型も引き起こす．$GL^+(2,\mathbb{R})$ の元 $\alpha=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，$\iota(\alpha)$ が $\mathfrak{H}$ の恒等写像になるならば，$cz^2+(d-a)z-b=0$ が任意の $z\in\mathfrak{H}$ について成立しなければならないので, $\alpha\in\mathbb{R}^\times\cdot 1$ である．

したがって，ι が全射であることが示せれば，準同型定理より定理が成立することがわかる．

ここで，次の 2 つの補題を用意する．

補題 2.1.3
$z\in\mathfrak{H}$ とすると，$SL(2,\mathbb{R})$ の元 α で $\alpha i=z$ なるものが存在する．

証明
$z=x+iy\in\mathfrak{H}$ とする．$\alpha=\frac{1}{\sqrt{y}}\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\alpha\in SL(2,\mathbb{R})$ であり，$\alpha i=z$ が成立している．
$\square$

補題 2.1.4
$\mathrm{Aut}(\mathfrak{H})$ の元 ψ で $\psi(i)=i$ となるものは，$SO(2,\mathbb{R})$ の元 β で $\psi=\iota(\beta)$ と書き表せる．

証明
$\psi\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{H})$ は，$\psi(i)=i$ なる元とし，ρ は，

$$\rho(z)=\frac{z-i}{z+i},\quad (z\in\mathfrak{H})$$

なる $\mathfrak{H}$ から K への同型写像とする (命題 2.1.1 参照)．$\rho(i)=0$ であるから，$\psi'=\rho\psi\rho^{-1}$ は，$\psi'(0)=0$ となる K の自己同型写像である．ψ' および ψ'^{-1} に Schwarz の定理を適用すると，

$$|\psi'(z)|=|z|$$

である．ここで，再び Schwarz の定理を用いると，$0\leq\theta<0$ が存在して，

$$\psi(z)=\rho^{-1}\psi'\rho(z)=\frac{(\cos\theta)z+\sin\theta}{(-\sin\theta)z+\cos\theta}$$

となる．よって，$k_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\in SO(2,\mathbb{R})$ とおくと，

$$\psi=\iota(k_\theta)$$

となり，題意は証明された．

ここで，定理の証明に戻る．
$\varphi\in\mathfrak{H}$ とする．$z=\varphi(i)$ に補題 2.1.3 を適用すると，$\alpha(\in SL(2,\mathbb{R}))$ が存在して，$\alpha^{-1}\varphi(i)=i$ である．補題 2.1.4 の ψ として，$\iota(\alpha^{-1})\varphi$ をとると，$\varphi=\iota(\alpha\beta)$ となるから，ι は全射である．
以上で，定理の証明が完了した． □

注．1 (Schwarz の定理)
$f(z)$ を $|z|<R$ で正則で，$|f(z)|\leq M$ とし，$f(0)=0$ とすれば，

$$|f(z)|\leq\frac{M}{R}|z|,\quad (|z|<R).$$

ここで等号が成立するのは，

$$f(z)\equiv e^{i\theta}\frac{M}{R}z$$

の時に限る．
証明は関数論の本を参照のこと (たとえば，辻正次『複素函数論』(槙書店)p.135 など)．

以上より，$\mathrm{Aut}(\mathfrak{H})$ は $SL(2,\mathbb{R})$ の元で尽くされることがわかる．そこで，$SL(2,\mathbb{R})$ の引き起こす変換について，次のように分類する．
$\sigma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{R})$ に対して，σ による不動点を考える．

$$\begin{aligned} z\text{ が}\sigma\text{による不動点} &\iff \sigma(z)=z\\ &\iff -cz^2+(a-d)z+b=0\end{aligned}$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 Δ とし，2 次方程式の実数解の個数に応じて，$SL(2,\mathbb{R})$ を次のように分類する．

1. $\Delta < 0 \Longleftrightarrow |a+d| < 2$ のとき

   上の 2 次方程式は 2 つの共役解 $z_0(\in \mathfrak{H}), \overline{z_0}$ をもつ．すなわち，σ は，$\mathfrak{H}$ 上に唯一の不動点を持つ．このとき，σ を楕円元という．

2. $\Delta = 0 \Longleftrightarrow |a+d| = 2$ のとき

   上の 2 次方程式はただ 1 つの実数解 x_0 をもつ．すなわち，σ は，$\mathfrak{H}$ に不動点がなく，$\mathbb{R}$ 上に唯一つの不動点 x_0 を持つ．このとき，σ を放物元という．

3. $\Delta > 0 \Longleftrightarrow |a+d| > 2$ のとき

   上の 2 次方程式は相異なる 2 つの実数解 x_1, x_2 をもつ．すなわち，σ は，$\mathfrak{H}$ 上に不動点を持たず，$\mathbb{R}$ 上に 2 つの不動点を持つ．このとき，σ を双曲元という．

また，σ の引き起こす $\mathfrak{H}$ 上の自己同型を 1. 楕円的変換，2. 放物的変換，3. 双曲的変換と呼ぶ．
最後に，$\mathfrak{H}$ 上に $\mathrm{Aut}(\mathfrak{H})$ で不変な metric と測度を定義しておく．
$z = x + iy$ とおき，$\mathfrak{H}$ 上の Riemann 計量 ds^2, および測度 dv を

$$ds^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{y^2} \quad , \quad dv = \frac{dxdy}{y^2}$$

と定義する．

$\mathfrak{H}$ 上の非 Euclid 直線は，実軸 $\mathbb{R}$ と直交する円または直線として表示される．また，2 点 $z_1, z_2 \in \mathfrak{H}$ に対して，z_1, z_2 を通る直線の距離 (=測地線の長さ)l は，l と $\mathbb{R}$ の交点を $z_\infty, z_{-\infty}$ とすると，

$$l = \log(z_1, z_2, z_\infty, z_{-\infty})$$

で与えられることが知られている．ただし，$(z_1, z_2, z_\infty, z_{-\infty})$ は 4 点の非調和比である．

注 . 2
4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 の非調和比 (z_1, z_2, z_3, z_4) とは，

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

である．

2.2 第 1 種 Fuchs 群

前章にて，$\mathrm{Aut}(\mathfrak{H})$ が $SL(2, \mathbb{R})$ で尽くされることが分かったわけであるが，この章では，$SL(2, \mathbb{R})$ が $\mathfrak{H}$ にどのように作用するのかについて，Shimura[12] や土井・三宅 [2] を参照にしながら述べたいと思う．

群 G が位相空間の構造を持ち，この位相に関して，

$$\begin{array}{rccl} G \times G \ni & (g,h) & \longmapsto & gh \quad \in G \\ G \ni & g & \longmapsto & g^{-1} \quad \in G \end{array}$$

が連続であるとき，G を位相群 (topological group) という．
本論文では，すべての位相群は Hausudorff であると仮定する．
位相群の位相空間への作用を次のように定義する．

定義 2.2.1
位相群 G が位相空間 X に作用している，とは，連続写像

$$G \times X \ni (g, x) \longmapsto gs \in X$$

で，次の条件をみたすものが定義されているときにいう:.

(i) $a, b \in G,\ x \in X$ のときに，$(ab)x = a(bx)$ が成立する．

(ii) G の単位元を e とするとき，任意の $x \in X$ に対して，$ex = x$ が成立する

G が X に作用しているとき，X の点 x に対して，

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$$

を，x における G の固定部分群または isotoropy 部分群という．
位相群 G の固定部分群は G の閉部分群である．
次に，X の点 x を固定したときに，X の部分集合

$$Gx = \{gx \mid g \in G\}$$

を x の G-軌跡 (G-orbit) という．X に含まれる G-軌跡全体を $G \setminus X$ という記号で表す．同じ G-軌跡に属する 2 つの点は，G-同値であるといわれる．また，X 自身が G-軌跡であるとき，G は X に推移的に作用するという．
G は X に推移的に作用するとは，言い換えると，

任意の $x, y \in X$ に対して, $gx = y$ となる G の元 g が存在する

ということである．したがって，これまでのところで，$G = SL(2, \mathbb{R}), X = \mathfrak{H}$ とすれば，補題 2.1.3 により，

$SL(2, \mathbb{R})$ は $\mathfrak{H}$ に推移的に作用する．

と言うことができる．
さて，X から $G \setminus X$ への自然な射影を $\pi(x) = Gx$ で表す．すなわち，

$$X \ni x \longmapsto \pi(x) = Gx \in G \setminus X$$

である．$G \setminus X$ に上の π が連続となるように入れることのできる位相の中で最も強いものを $G \setminus X$ の商位相 (quotient topology) という．言い換えると，開集合の全体として π による逆像が X で開集合となるような部分集合の全体をとって定義される位相である．$G \setminus X$ に商位相を入れた位相空間を X の G の作用による商空間 (quotient space) であるという．π は X から商空間 $G \setminus X$ への連続な開写像である．
位相群 G の閉部分群を K とすると，K は左および右からの乗法で，G に作用する．G の K による剰余類の集合，$K \setminus G$ および G/K に上の意味での商空間としての位相を入れたものを，G の K による剰余類の空間 (等化空間) という．
さて，次の命題が成立する．

命題 2.2.2
位相群 G が位相空間 X に推移的に作用しているとする．G が局所 compact で可算基を持ち，X は局所 compact で Hausdorff であるとする．X の任意の点 x に対して，G の G_x による剰余類の空間 $G \setminus G_x$ は X と $gG_x \longmapsto gx$ なる対応で位相同型である．

証明
Shimura[12]p.2 Theorem 1.1 を参照のこと．

　よって，ここで $G = SL(2,\mathbb{R}), X = \mathfrak{H}$ とすれば，$SL(2,\mathbb{R})_i = SO(2,\mathbb{R})$ であるから，次のことがわかる．

$$\begin{array}{ccc} SL(2,\mathbb{R})/SO(2,\mathbb{R}) & \cong & \mathfrak{H} \\ \\ \alpha SO(2,\mathbb{R}) & \longmapsto & \alpha i \end{array}$$

定義 2.2.3
群 Γ が位相空間 X に不連続に (properly discontinuously) 作用するとは，Γ が G に作用しており，さらに X の任意の 2 点 x, y に対し，各々の近傍 U, V を適当に取ると，

$$\gamma(U) \cap V \neq \phi,\ \gamma \in \Gamma$$

となる ϕ が，高々有限個しか存在しないことをいう．

定義 2.2.4
位相群 G の部分群 Γ が G の離散部分群 (discreate subgroup) であるとは，Γ が G の部分空間としての位相で離散的であるときにいう．

言い換えると，G の単位元 1 の近傍 V で，$V \cap \Gamma = \{1\}$ となるものが存在することである．
　このとき，次の命題が成立する．

命題 2.2.5
位相群 G の離散部分群 Γ は G に集積点を持たない閉部分群である．

証明
Shimura[12]p.2 Proposition 1.4 を参照のこと．

命題 2.2.6
位相群 G が位相空間 X に推移的に作用しているとする．G が局所 compact で可算基を持ち，X は局所 compact で Hausdorff であるとする．Γ を G の部分群とし．X の各元における G の固定部分群が compact であるとする．このとき，

$$\Gamma \text{は } G \text{ の離散部分群である．} \Longleftrightarrow \Gamma \text{は } X \text{ に不連続に作用する．}$$

が成立する．

証明
Shimura[12]p.3 Proposition 1.6 を参照のこと．

　したがって，定理 2.1.2 命題 2.2.6 より次のことが言える．

命題 2.2.7
$SL(2,\mathbb{R})$ の離散部分群は複素上半平面 $\mathfrak{H}$ に不連続に作用する．逆に，複素上半平面 $\mathfrak{H}$ に不連続に作用する $\mathrm{Aut}(\mathfrak{H})$ の部分群は $SL(2,\mathbb{R})$ の離散部分群から得られる．

定義 2.2.8
$SL(2,\mathbb{R})$ の離散部分群を Fuchs 群という．

例 2.1
$\Gamma = SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) | a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$ とする．$SL(2,\mathbb{Z}) = M(2,\mathbb{R}) \cap SL(2,\mathbb{R})$ であり，$M(2,\mathbb{Z})$ は $M(2,\mathbb{R})$ の離散部分集合であるので，$SL(2,\mathbb{Z})$ は $SL(2,\mathbb{R})$ の離散部分群となり，Fuchs 群である．

定義 2.2.9
Γ を Fuchs 群とする．$z \in \mathfrak{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が Γ の楕円元，放物元，双曲元の固定点であるとき，各々 z は Γ の楕円点，cusp, 双曲点であるという．

Γ を Fuchs 群，すなわち，$\mathrm{Aut}(\mathfrak{H})$ の discrete な部分群とする．このとき，Γ の基本領域を次のように定義する．

定義 2.2.10
$\mathfrak{H}$ の部分集合 F が Γ の基本領域であるとは，

1. F は連結集合で，$F = \overline{F^i}$. (F^i は F の内点からなる集合，$\overline{F}$ は F の閉包)
2. $\sigma, \tau \in \Gamma, \sigma \neq \tau \Longrightarrow \sigma(F^i) \cap \tau(F^i) = \phi$
3. $X = \bigcup_{\sigma \in \Gamma} \sigma(F)$

例 2.2 (**清水** [11])
$SL(2,\mathbb{Z})$ 基本領域 $D(1)$ は，

$$D(1) = \left\{ z \mid |z| \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1 \right\}$$

であり，その面積は，

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx = \frac{\pi}{3}$$

となる．

定義 2.2.11
Fuchs 群 Γ が第 1 種であるとは，Γ の基本領域 F の測度 $v(F)$ が有限であることをいう．

これ以降，本論文では，第 1 種 Fuchs 群のみを考えることとする．

2.3 $SL(2,\mathbb{Z})$ の合同部分群

$SL_2(\mathbb{Z})$ およびその指数有限な部分群を modular 群と呼ぶ.

自然数 N に対して，$SL_2(\mathbb{Z})$ の部分集合 $\Gamma_0(N)$,$\Gamma_1(N)$,$\Gamma(N)$ を，

$$\begin{aligned}
\Gamma_0(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0(\mathrm{mod} N) \right\} \\
\Gamma_1(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0(\mathrm{mod} N), a \equiv d \equiv 1(\mathrm{mod} N) \right\} \\
\Gamma(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid b \equiv c \equiv 0(\mathrm{mod} N), a \equiv d \equiv 1(\mathrm{mod} N) \right\}
\end{aligned}$$

と定義する．$\Gamma_0(N)$,$\Gamma_1(N)$,$\Gamma(N)$ が $SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群をなすことは定義より容易に確かめられる．$\Gamma_0(1) = SL(2,\mathbb{Z})$ である．また，

$$\begin{aligned}
SL_2(\mathbb{Z}) = \Gamma_0(1) = \Gamma_1(1) = \Gamma(1) \\
SL_2(\mathbb{Z}) \supset \Gamma_0(N) \supset \Gamma_1(N) \supset \Gamma(N)
\end{aligned}$$

である．$[\Gamma(1):\Gamma(N)] < \infty$ であるので，これらは modular 群である．$\Gamma(N)$ は，$SL(s,\mathbb{Z})$ の正規部分群であり，$\Gamma(N)$ を主合同群 (principal congruence group) と言い，主合同群を含む modular 群を合同部分群と言う．このとき自然数 N を，$\Gamma_0(N)$,$\Gamma_1(N)$,$\Gamma(N)$ の level と言う．

本論文では主に $\Gamma_0(N)$ について考察する。$\Gamma_0(N)$ は第 1 種 Fuchs 群である．

$\Gamma_0(N)$ に関しては，その $SL_2(\mathbb{Z})$ に対する群指数や，同値でない楕円点，cusp の個数は次の定理により具体的に求めることができる．

定理 2.3.1

μ を $\Gamma_0(N)$ の $SL(2,\mathbb{Z})$ に対する群指数，ν_2, ν_3, ν_∞, を $\Gamma_0(N)$ の位数 2 の楕円点，位数 3 の楕円点，cusp の各々の同値類の個数とする．このとき，

$$\begin{aligned}
\mu &= N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \\
\nu_2 &= \begin{cases} 0 & , \quad (4 \mid N) \\ \displaystyle\prod_{p|N} \left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right) & , \quad (4 \nmid N) \end{cases} \\
\nu_3 &= \begin{cases} 0 & , \quad (9 \mid N) \\ \displaystyle\prod_{p|N} \left(1 + \left(\frac{-3}{p}\right)\right) & , \quad (9 \nmid N) \end{cases} \\
\nu_\infty &= \sum_{d|N} \phi((d, N/d))
\end{aligned}$$

である．ここで ϕ は Euler 関数であり，p は N の素因子を，d は N の正の約数全体を動く．なお，$\left(\frac{-1}{p}\right)$, $\left(\frac{-3}{p}\right)$ は平方剰余記号である．つまり，

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 0 & , \quad (p = 2) \\ 1 & , \quad (p \equiv 1(\mathrm{mod} 4)) \\ -1 & , \quad (p \equiv 3(\mathrm{mod} 4)) \end{cases} \quad , \quad \left(\frac{-3}{p}\right) = \begin{cases} 0 & , \quad (p = 3) \\ 1 & , \quad (p \equiv 1(\mathrm{mod} 3)) \\ -1 & , \quad (p \equiv 2(\mathrm{mod} 3)) \end{cases}$$

証明
Shimura.[12]p.25 参照.

$\mathfrak{H}$ に第 1 種 Fuchs 群 Γ の cusp をすべて付加した空間を $\mathfrak{H}^*(=\mathfrak{H}\cup\mathbb{Q}\cup\{i\infty\})$ と書くことにする.

定理 2.3.2
μ, ν_2, ν_3, ν_∞ は，定理 2.3.1 の通りとする．このとき，Riemann 面 $\Gamma_0(N)\setminus\mathfrak{H}^*$ の種数 g は，μ, ν_2, ν_3, ν_∞ を用いて，次のように表される.

$$g = 1 + \frac{\mu}{12} - \frac{\nu_2}{4} - \frac{\nu_3}{3} - \frac{\nu_\infty}{2}$$

証明
Shimura.[12]p.23 参照.

$g = 1$ となる，N は $N = 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 24, 27, 32, 36, 49$ の 12 個である.
これら 12 個の N について，$\Gamma_0(N)$ の $SL(2,\mathbb{Z})$ に対する群指数，同値でない位数 2,3 の楕円点および cusp の個数を以下にまとめておく.

N	μ	ν_2	ν_3	ν_∞	g	cusps
11	12	0	0	2	1	$i\infty$, 0
14	24	0	0	4	1	$i\infty$, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{7}$
15	24	0	0	4	1	$i\infty$, 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$
17	18	2	0	2	1	$i\infty$, 0
19	20	0	2	2	1	$i\infty$, 0
20	36	0	0	6	1	$i\infty$, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$
21	32	0	2	4	1	$i\infty$, 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$
24	48	0	0	8	1	$i\infty$, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$
27	36	0	0	6	1	$i\infty$, 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$
32	48	0	0	8	1	$i\infty$, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{16}$
36	72	0	0	12	1	$i\infty$, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{18}$
49	56	0	2	8	1	$i\infty$, 0, $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$

2.4 保型形式

以下，Γ を第 1 種 Fuchs 群とする.
いま，$z\in\mathbb{C}$，$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$ とし，

$$j(\sigma, z) = cz + d$$

とおく．このとき，$j(\sigma, z)$ は次の性質を満たす.

命題 2.4.1

$$
\begin{aligned}
j(\sigma\tau, z) &= j(\sigma, \tau(z))j(\tau, z),\ (\sigma, \tau \in \Gamma) \\
\frac{d}{dz}\sigma(z) &= \det(\sigma)j(\sigma, z)^{-2}.
\end{aligned}
$$

証明
定義より，

$$
f(\sigma\tau(z)) = f(\sigma(\tau(z))) = f(\tau(z))j(\sigma, \tau(z)) = f(z)j(\tau, z)j(\sigma, \tau(z))
$$

$$
\frac{d}{dz}\sigma(z) = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} = \det(\sigma)j(\sigma, z)^{-2}
$$

□

$\mathfrak{H}$ 上の解析的自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{H})$ は $GL^+(2, \mathbb{R})$ である．ここで，$\sigma \in GL^+(2, \mathbb{R})$ のとき，

$$
\left(\frac{d}{dz}\sigma(z)\right)^{1/2} := \sqrt{\det(\sigma)}j(\sigma, z)^{-1}
$$

と定義する．

さて，整数 k を一つ固定する．$\mathfrak{H}$ 上の関数 $f(z)$ に対して，任意の $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL^+(2, \mathbb{R})$ による作用を，

$$
f|[\sigma]_k = \det(\sigma)^{k/2}f(\sigma(z))j(\sigma, z)^{-k}
$$

と定義する．このとき，

命題 2.4.2

$$
f|[\sigma\tau]_k = (f|[\sigma]_k)|[\tau]_k
$$

が成立する．

証明
命題 2.4.1 より，$j(\sigma\tau, z) = j(\sigma, \tau(z))j(\tau, z)$ が成立するので，

$$
\begin{aligned}
(f|[\sigma]_k)|[\tau]_k &= (\det(\sigma)^{k/2}f(\sigma(z))j(\sigma, z)^{-k})|[\tau]_k \\
&= \det(\tau)^{k/2}(\det(\sigma)^{k/2}f(\sigma(\tau(z)))j(\sigma, \tau(z))^{-k})j(\tau, z)^{-k} \\
&= \det(\sigma\tau)^{k/2}f(\sigma\tau(z))j(\sigma\tau, z)^{-k} \\
&= f|[\sigma\tau]_k
\end{aligned}
$$

となる． □

定義 2.4.3
k を整数とする．$\mathfrak{H}$ 上の関数 f が次の条件 1.2.3. をみたすとき，f を Γ に関する weight k の保型形式 (automorphic form) という．

1. f が $\mathfrak{H}$ 上有理型である

2. $\forall\gamma \in \Gamma$ に対して，$f|[\gamma]_k = f$ が成立する

3. f が Γ の任意の cusp で有理型である

特に，Γ が $SL(2,\mathbb{Z})$ の level N の主合同部分群の場合，automorphic form は，modular form と一般に呼ばれる．

さて，上の条件 3. について詳しく説明する．

Γ が cusp x を持つとし，$SL(2,\mathbb{R})$ の元 ρ を，$\rho(x) = i\infty$ が成立するようにとる．x の固定部分群を $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(x) = x\}$ とする．すると，$\rho\Gamma_x\rho^{-1}$ は $i\infty$ を固定するので，正数 h が存在して，

$$\rho\Gamma_x\rho^{-1} \cdot \{\pm 1\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^m | m \in \mathbb{Z} \right\}$$

が成立する．また，条件 2. より，$\forall\sigma \in \rho\Gamma_x\rho^{-1}$ に対して，

$$(f|[\rho^{-1}]_k)|[\sigma]_k = f|[\rho^{-1}]_k$$

が成立する．

さて，k の偶奇によって次のような状況が考えられる．

1. k が偶数のとき

   $(f|[\rho^{-1}]_k)|[\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]_k = f|[\rho^{-1}]_k$ が成立するので，

   $$(f|[\rho^{-1}]_k)(z+h) = (f|[\rho^{-1}]_k)(z)$$

   である．故に，$f|[\rho^{-1}]_k$ は，$z \mapsto z+h$ で不変であるので，K を単位円盤，O をその原点とすると，$K - \{O\}$ 上の関数 $\Phi(q)$ が存在して，

   $$f|[\rho^{-1}]_k = \Phi(e^{2\pi iz/h})$$

   と書ける．f が $\mathfrak{H}$ 上有理型であるから，Φ は $K - \{O\}$ 上の有理型関数である．

   条件 3. はこの $\Phi(q)$ が $q = 0$ で有理型であることを意味している．

2. k が奇数のとき

   $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ ならば，1. より，$f \equiv 0$.

   $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \Gamma$ ならば，

   $$\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \rho\Gamma_x\rho^{-1} \text{または}, \begin{pmatrix} -1 & h \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \rho\Gamma_x\rho^{-1}$$

   であり ($\because$ $\rho\Gamma_x\rho^{-1}$ は無限巡回群であるから，これら二つの元を同時に含めば，積も含まなければならない．しかし積は -1 になっている)，これらはそれぞれ，$\rho\Gamma_x\rho^{-1}$ の生成元となる．

$\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in \rho\Gamma_x\rho^{-1}$ の場合，x を Γ の正則な cusp(regular cusp), $\begin{pmatrix}-1 & h\\ 0 & -1\end{pmatrix} \in \rho\Gamma_x\rho^{-1}$ の場合，x を Γ の非正則な cusp(irregular cusp) という．このとき，

$$(f|[\rho^{-1}]_k)(z+h) = \begin{cases} (f|[\rho^{-1}]_k)(z) & , \ (x \text{ が正則な cusp}) \\ -(f|[\rho^{-1}]_k)(z) & , \ (x \text{ が非正則な cusp}) \end{cases}$$

となるので，x が正則な cusp の場合は，k:even の場合に同じであるが，非正則 cusp の場合には，原点の近傍で有理型な奇関数 Ψ を用いて，

$$f|[\rho^{-1}]_k = \Psi(e^{\frac{\pi iz}{h}})$$

と書ける．条件 3. はこのような原点の周りで有理型な関数 Ψ が存在することを意味している．

ところで，$\rho \in SL(2,\mathbb{R})$ であることから，$\det(\rho^{-1}) = 1$ なので，

$$\frac{d}{dz}(\rho^{-1}(z)) = \det(\rho^{-1})j(\rho^{-1},z)^{-2} = j(\rho^{-1},z)^{-2}$$

が成立する．先ほどと同じように，

$$\left(\frac{d}{dz}(\rho^{-1}(z))\right)^{1/2} = j(\rho^{-1},z)^{-1}$$

と定義する．したがって，

$$\begin{aligned} f|[\rho^{-1}]_k(z) &= \det(\rho^{-1})^{k/2}f(\rho^{-1}(z))j(\rho^{-1},z)^{-k} \\ &= f(\rho^{-1}(z))j(\rho^{-1},z)^{-k} \\ &= f(\rho^{-1}(z))\left(\frac{d\rho^{-1}(z)}{dz}\right)^{k/2} \end{aligned}$$

さらに，f が，任意の cusp x で正則である (零点を持つ) とは，先ほどの，Φ,Ψ が原点で正則である (零点を持つ) ことを意味する．

注 . 3
f の cusp x における有理性や正則性，零点を持つかどうかは， cusp x を $i\infty$ へと変換する ρ の選び方によらない．

Γ に関する weight k の保型形式全体を，$A_k(\Gamma)$ という記号で表す．また，$G_k(\Gamma), S_k(\Gamma)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} G_k(\Gamma) &:= \{f \in A_k(\Gamma) \mid f \text{ が } \mathfrak{H} \text{ 上および} \Gamma \text{の各 cusp で正則}\} \\ S_k(\Gamma) &:= \{f \in A_k(\Gamma) \mid f \text{ が } \mathfrak{H} \text{ 上で正則で,} \Gamma \text{の各 cusp で零点を持つ}\} \end{aligned}$$

このとき，$G_k(\Gamma)$ を正則保型形式 (integral form), $S_k(\Gamma)$ を尖点形式 (cusp form) という．
また，特に，$f|[\rho^{-1}]$ が $e^{\frac{2\pi iz}{h}}$ あるいは $e^{\frac{\pi iz}{h}}$ のベキ級数として

$$f|[\rho^{-1}]_k(z) = \sum_{n \geq n_0} a_n e^{\frac{2\pi inz}{h}}$$

のように展開されるとき，この展開のことを，cusp x における f の Fourier 展開といい，その展開の係数 a_n を Fourier 係数という．

したがって，先ほどの正則保型形式，cusp form をベキ級数の言葉で言えば，

$$\begin{array}{lcl} f\text{ が正則保型形式} & \Longleftrightarrow & n<0\text{ のとき Fourier 係数 }a_n=0 \\ f\text{ が cusp form} & \Longleftrightarrow & n\leq 0\text{ のとき Fourier 係数 }a_n=0 \end{array}$$

とである．

命題 2.4.4
$A_k(\Gamma), G_k(\Gamma), S_k(\Gamma)$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間であり次の性質をみたす．

(1) $A_k(\Gamma)\supset G_k(\Gamma)\supset S_k(\Gamma)$

(2) Γ が cusp を持たなければ，$G_k(\Gamma)=S_k(\Gamma)$

(3) $f\in A_k(\Gamma), f\neq 0 \Longrightarrow f^{-1}\in A_{-k}(\Gamma)$

(4) $f\in A_k(\Gamma), g\in A_m(\Gamma) \Longrightarrow fg\in A_{km}(\Gamma)$

(5) $f\in G_k(\Gamma), g\in G_m(\Gamma) \Longrightarrow fg\in G_{km}(\Gamma)$

(6) $f\in G_k(\Gamma), g\in S_m(\Gamma) \Longrightarrow fg\in S_{km}(\Gamma)$

証明
いずれも定義より明らかである．

特に，$k=0$ とすると，上記命題の (3)(4) より，$A_0(\Gamma)$ は体としての構造をもつ．以上のようにして定義した保型形式を，次のように拡張し，指標付きの保型形式を定義する．

定義 2.4.5
k を整数, $\chi:\Gamma\longrightarrow\mathbb{C}^\times$ を位数有限な指標とする．$\mathfrak{H}$ 上の関数 f が次の条件 1.2.3. をみたすとき，f を指標 χ を持つ Γ に関する weight k の保型形式という．

1. f が $\mathfrak{H}$ 上有理型である
2. $\forall\gamma\in\Gamma$ に対して，$f|[\gamma]_k=\chi(\gamma)f$ が成立する
3. f が Γ の任意の cusp で有理型である

指標 χ を持つ Γ に関する weight k の保型形式全体を，記号 $A_k(\Gamma,\chi)$ で表す．

さらに，$G_k(\Gamma,\chi), S_k(\Gamma,\chi)$ を次のように定義する．

$$\begin{array}{rl} G_k(\Gamma,\chi):= & \{f\in A_k(\Gamma,\chi)\mid f\text{ が }\mathfrak{H}\text{ 上および}\Gamma\text{の各 cusp で正則 }\} \\ S_k(\Gamma,\chi):= & \{f\in A_k(\Gamma,\chi)\mid f\text{ が }\mathfrak{H}\text{ 上で正則で,}\Gamma\text{の各 cusp で零点を持つ }\} \end{array}$$

このとき，$G_k(\Gamma,\chi)$ を指標 χ を持つ Γ に関する weight k の正則保型形式 (integral form), $S_k(\Gamma,\chi)$ を指標 χ を持つ Γ に関する weight k の尖点形式 (cusp form) という．

定義 2.4.6
Riemann 面 $\Gamma\setminus\mathfrak{H}^*$ 上の関数体 $A_0(\Gamma)$ を Γ に関する保型関数体 (automorphic function field) と言い，$A_0(\Gamma)$ の元を保型関数 (automorphic function) と言う．

定理 2.4.7
$F(z)$ が Γ に関する weight 2 の cusp form になることは，微分形式 $F(z)dz$ が Riemann 面 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ 上の第 1 種微分になることと同等である．

したがって，次の定理が成り立つ．

定理 2.4.8
Γ に関する weight 2 の cusp form $F(z)$ を 各 cusp で q 展開すると，q^1 から始まるベキ級数になる．

最後に，cusp form の次元について述べておく．
$G_k(\Gamma), S_k(\Gamma)$ のベクトル空間としての次元は，Riemann-Roch の定理を用いて計算することが出来る．

定理 2.4.9
k は even とする．g は Riemann 面 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ の genus, $\{e_1,\ldots,e_r\}$ は Γ の同値でない楕円元の位数，m は Γ の cusp の同値類の個数とする．このとき，$G_k(\Gamma), S_k(\Gamma)$ のベクトル空間としての次元は次のように定まる．

$$
\dim G_k(\Gamma) = \begin{cases} (k-1)(g-1)+\dfrac{km}{2}+\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{k}{2}(1-\frac{1}{e_i})\right] & (k>2), \\ g+m-1 & (k=2, m>0), \\ g & (k=2, m=0), \\ 1 & (k=0), \\ 0 & (k<0). \end{cases}
$$

$$
\dim S_k(\Gamma) = \begin{cases} (k-1)(g-1)+\dfrac{(k-2)m}{2}+\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{k}{2}(1-\frac{1}{e_i})\right] & (k>2), \\ g & (k=2), \\ 1 & (k=2, m=0), \\ 0 & (k=0, m>0), \\ 0 & (k<0). \end{cases}
$$

証明
Shimura[12] 参照

定理 2.4.10
k は odd とする．記号は定理 2.4.9 に準ずる．ただし，$-1\notin\Gamma$ とし，u, v を各々正則および非正則 cusp の同値類の個数とする．このとき，$G_k(\Gamma), S_k(\Gamma)$ のベクトル空間としての次元は次のように定まる．

$$
\dim G_k(\Gamma) = \begin{cases} (k-1)(g-1)+\dfrac{ku}{2}+\dfrac{(k-1)v}{2}+\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{k}{2}(1-\frac{1}{e_i})\right] & (k\geq 3), \\ 0 & (k<0). \end{cases}
$$

$$
\dim S_k(\Gamma) = \begin{cases} (k-1)(g-1)+\dfrac{(k-2)u}{2}+\dfrac{(k-1)v}{2}+\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{k}{2}(1-\frac{1}{e_i})\right] & (k\geq 3), \\ 0 & (k<0). \end{cases}
$$

証明
Shimura[12] 参照

特に，$\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ の場合，$g=0, m=1$ であり，さらに $\{e_1,e_2\}=\{2,3\}$ であることから，$G_k(\Gamma), S_k(\Gamma)$ のベクトル空間としての次元は定理 2.4.9 を使って求めることが出来る．

命題 2.4.11
$\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ とし，k は $k \geq 2$ の even のとき，

$$\begin{aligned}
\dim G_k(\Gamma) &= \begin{cases} \left[\dfrac{k}{12}\right] & (k \equiv 2 \ (\mathrm{mod} 12)), \\ \left[\dfrac{k}{12}\right]+1 & (k \not\equiv 2 \ (\mathrm{mod} 12)), \end{cases} \\
\dim S_k(\Gamma) &= \begin{cases} 0 & (k=2), \\ \left[\dfrac{k}{12}\right]-1 & (k>2, k \equiv 2 \ (\mathrm{mod} 12)), \\ \left[\dfrac{k}{12}\right] & (k \not\equiv 2 \ (\mathrm{mod} 12)). \end{cases}
\end{aligned}$$

また，さらに，偶数次 weight の cuspform の次元については次の公式が知られている．

$$\dim S_k(\Gamma(2)) = \begin{cases} \left[\dfrac{k-4}{2}\right] & (k = \mathrm{even} > 2), \\ 0 & (k=2), \end{cases}$$

さらに，$N>2$ ならば，

$$\dim S_k(\Gamma(N)) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{24} N^3 \displaystyle\prod_{p|N}(1-p^{-2}) - \dfrac{1}{4} N^2 \prod_{p|N}(1-p^{-2}) & (k = \mathrm{even} > 2), \\ \dfrac{1}{24} N^3 \displaystyle\prod_{p|N}(1-p^{-2}) - \dfrac{1}{4} N^2 \prod_{p|N}(1-p^{-2}) + 1 & (k=2), \end{cases}$$

証明
[11]§2.3 参照.

2.5 2 次形式に付随する ϑ 関数

この章では，ϑ 関数の中でも特に 2 次形式に付随する ϑ 関数，いわゆる ϑ 級数といわれるものについて, Eichler[3] を参考にして考察する．なお，ここで取り扱う 2 次形式は整係数 2 元 2 次形式である．

まずはじめに n 次の Siegel 上半空間 $\mathfrak{H}^n$ を定義しておく．

定義 2.5.1
n 次複素対称行列 $Z = X + iY$ で虚部 $Y > 0$(正定値) であるもの全体の空間 $\mathfrak{H}^n$ を n 次の Siegel 上半空間という．すなわち

$$\mathfrak{H}^n = \{Z = X+iY \in M_n(\mathbb{C}) \mid X, Y \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tX = X,\ {}^tY = Y,\ Y>0\}$$

なお，$n=1$ のとき，$\mathfrak{H}^1$ は複素上半平面であり，このとき，単に $\mathfrak{H}$ と表すことにする．

2.5.1 ϑ 関数

$T=(\tau_{ij})\in\mathfrak{H}^n$ とし，$m=(m_i),\ x=(x_i),\ y=(y_i)$ をそれぞれ n 次縦ベクトルとする (ただし，$m_i\in\mathbb{Z},\ x_i,y_i\in\mathbb{C}$)．また，$T[m]$ を次のように定義する．

$$T[m]={}^t mTm=\sum_{i,j=1}^{n}\tau_{ij}m_im_j$$

このとき，

$$\vartheta(T,x,y)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\exp(\pi iT[m-y]+2\pi i{}^t mx-\pi i{}^t xy)$$

で定義される関数を，ϑ 関数という．

1 次元，2 次元の ϑ 関数について，具体的に考察してみることにする．

(1) 1 次元の ϑ 関数について

ϑ 関数の定義において $n=1$ とする．$\tau\in\mathfrak{H},m\in\mathbb{Z},x,y\in\mathbb{C}$ として，

$$\vartheta(\tau,x,y)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\exp(\pi i(m-y)^2\tau+2\pi imx-\pi ixy)$$

となる．ここで，$x=y=0$ とし，$\vartheta(\tau,0,0)$ を単に $\vartheta(\tau)$ と表すことにすれば，

$$\vartheta(\tau)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\exp(\pi i\tau m^2)$$

となる．また，1 次元の ϑ 関数を 2 つ掛け合わせると，

$$\{\vartheta(\tau)\}^2=\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\exp(\pi i\tau m^2)\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp(\pi i\tau n^2)\right)=\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}\exp(\pi i\tau(m^2+n^2))$$

が得られる．

(2) 2 次元の ϑ 関数について

ϑ 関数の定義において $n=2$ とする．$T=\begin{pmatrix}\tau_{11}&\tau_{12}\\\tau_{12}&\tau_{22}\end{pmatrix}\in\mathfrak{H}^2,m\in\mathbb{Z}^2,x,y\in\mathbb{C}^2$ とすれば，

$$T[m]=\tau_{11}{m_1}^2+2\tau_{12}m_1m_2+\tau_{22}{m_2}^2$$

であり，$n=1$ の場合と同じように，$x=y=0$ とすれば，

$$\vartheta(T)=\sum_{m_1,m_2\in\mathbb{Z}}\exp(\pi i(\tau_{11}{m_1}^2+2\tau_{12}m_1m_2+\tau_{22}{m_2}^2))$$

が得られる．

2.5.2 整係数 2 元 2 次形式

一般に，2 元 2 次形式とは，$Q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ という形の式であるが，ここでは整数係数の 2 元 2 次形式のみを取り扱う．したがって，$a,b,c\in\mathbb{Z}$ である．特に $(a,b,c)=1$ であるとき，$Q(x,y)$ を原始的であるという．

まずはじめに，2 元 2 次形式の判別式を定義する．

定義 2.5.2
2 元 2 次形式 $Q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ の判別式 D を

$$D=b^2-4ac$$

と定義する．

注 . 4
$b^2\equiv 0$ or $1 \pmod 4$ であるから，判別式 $D\equiv 0$ or $1 \pmod 4$ である．逆に $D\equiv 0$ または $D\equiv 1(\mathrm{mod}4)$ である各数 D に対しては，判別式 D をもつ少なくとも一つの 2 次形式，すなわち基本形式

$$Q_1(x,y) \quad = \quad \begin{cases} x^2-\dfrac{D}{4}y^2 & , \quad D\equiv 0 \pmod 4 \\ x^2+xy+\dfrac{1-D}{4}y^2 & , \quad D\equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$$

が存在する．

また，行列を用いれば，

$$Q(x,y)=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表され，$A=\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ とおけば，判別式 D は，

$$D=-4\ \mathrm{det}A$$

と表せる．

次に 2 元 2 次形式の同値関係について定義する．

定義 2.5.3
2 つの 2 元 2 次形式 $Q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ および $Q'(x,y)=a'x^2+b'xy+c'y^2$ が対等であるとは，それらが，$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})$ による変換で互いにうつり合うことをいう．このとき，記号 $Q\sim Q'$ で表す．

つまり，上の定義は次のような状態のことをいっている．$Q(x,y)$ の x,y を

$$\begin{aligned} x' &= px+qy \\ y' &= rx+sy \end{aligned}$$

によって，置き換えれば，$Q'(x,y)$ にうつる，すなわち，

$$a'x^2+b'xy+c'y^2=a(px+qy)^2+b(px+qy)(rx+sy)+c(rx+sy)^2$$

従って，

$$\begin{aligned} a' &= ap^2+bpr+cr^2 \\ b' &= 2apq+b(ps+qr)+2crs \\ c' &= aq^2+bqs+cs^2 \end{aligned}$$

なる関係があるとき，$Q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ および $Q'(x,y)=a'x^2+b'xy+c'y^2$ が対等であるというのである．

命題 2.5.4
2 元 2 次形式の対等の関係 $Q\sim Q'$ は同値関係である. また，対等な 2 元 2 次形式 Q,Q' の判別式は等しい.

証明
初等的な計算により確かめられるので省略する.

定義 2.5.5
同一の判別式 D を持つ 2 元 2 次形式の全体を，対等の関係で類別して得られる各類を，判別式 D をもつ 2 元 2 次形式の類という.

判別式 D 持つ 2 元 2 次形式の類数を $h(D)$ と表す．$h(D)$ は有限であることが知られている (Gauss).

2.5.3　2 次形式に付随する ϑ 関数

まず，$2k$ 変数 $m_1,m_2,\cdots m_{2k}$ の 2 次形式 $F[m]$ を次のように定義する．

$$F[m]={}^tmFm=\sum_{i,j=1}^{2k}f_{ij}m_im_j\quad,\quad(f_{ij}=f_{ji})$$

行列 $F=(f_{ij})$ は有理整数を成分にもち，対角成分 f_{ii} はすべて偶数であるとする．したがって，m_i が有理整数なら $F[m]$ は常に偶数値をとる．また，F は正定値とする．

さて，自然数 N を，行列 NF^{-1} が再び有理整数を成分にもち，対角成分がすべて偶数になるような最小の自然数とする．この N を行列 F の level と呼ぶ．NF^{-1} の成分がすべて有理整数であり，$|NF^{-1}|=N^{2k}|F|^{-1}$ が成立するので，$|F|$ は N のベキを約数に持つことがわかる．

複素変数 τ を複素上半平面 $\mathfrak{H}$ 上にとる．このとき，$T=\tau F$ は最初の ϑ 関数の定義の条件を満たしている．よって，2 次形式 F に付随する ϑ 関数を次のように定義する．

$$\vartheta(\tau,x,y)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\exp(\pi i\tau F[m-y]+2\pi i{}^tmx-\pi i{}^txy)$$

ここで再び，$x=y=0$ としてみよう．すると，$\vartheta(\tau)$ は次のような形で表現できる．

$$\vartheta(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{2\pi in\tau}$$

ここで，a_n は $2k$ 元 2 次方程式 $\dfrac{1}{2}F[m]=n$ の解の個数を意味する．即ち，

$$a_n = \sharp\left\{ m \in \mathbb{Z}^n \mid \frac{1}{2}F[m]=n \right\}$$

先ほど定義した，2 次形式に付随する ϑ 関数の $\Gamma_0(N)$ による変換を考えよう．次の命題が成立する．

定理 2.5.6
$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ とする．このとき，次の等式が成立する．

$$\vartheta\left(\frac{a\tau+b}{Nc\tau+d}, ax+bFy, NcF^{-1}x+dy\right)(Nc\tau+d)^{-k} = \chi(d)\vartheta(\tau,x,y)$$

ただし，$\chi(d) = (\mathrm{sign}d)^k \left(\dfrac{(-1)^k|F|}{|d|}\right)$ であり，

$$\chi(d) = \begin{cases} \left(\dfrac{|F|}{|d|}\right) & , \quad (k:\mathrm{even}) \\ \left(\dfrac{-|F|}{d}\right) & , \quad (k:\mathrm{odd}) \end{cases}$$

である $\left(\mathrm{sign}d = \dfrac{d}{|d|}\text{を意味する}\right)$．

証明
Eichrer[3]p.49 参照．

ここで $x=y=0$ としてみる．すると，

$$\vartheta\left(\frac{a\tau+b}{Nc\tau+d}\right)(Nc\tau+d)^{-k} = \chi(d)\vartheta(\tau)$$

となり，$\vartheta(\tau)$ は指標 $\chi(d)$ をもつ，$\Gamma_0(N)$ に関する weight k の modular form であることが分かる．
さて，以上の議論を，整係数 2 元 2 次形式の場合に適用してみることにする．上記でいうと，$k=1$ の場合に相当する．
整係数 2 元 2 次形式 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ を次のように行列表示する．

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

このとき，

$$2f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であるので，上記で定義した，$F[m]$ を $2f(m_1,m_2)$ とみなすことができる．つまり次の命題が成立する．

命題 2.5.7
整係数 2 元 2 次形式を $f(x,y)$ とすれば，

$$\vartheta(z) = \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^2} \exp(2\pi i f(x,y)z)$$

は，$z \in \mathfrak{H}$ で収束する整関数である．また，$f(x,y)=n$ の有理整数解の個数を a_n で表すと，

$$\vartheta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

となる．行列 $\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}$ の level を N とするとき，$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ に対して，

$$\vartheta(\sigma z) = \chi(d)(cz+d)\vartheta(z)$$

が成立する (ただし，$\chi(d) = \left(\dfrac{-D}{d}\right)$，$-D = b^2 - 4ac$).

つまり，$\vartheta(z)$ は指標 $\chi(d)$ をもつ $\Gamma_0(N)$ に関する weight 1 の modular form である．

具体例を紹介する．

例 2.3
[判別式 $D=-15$ を持つ整係数 2 元 2 次形式] 判別式 $D=-15$ を持つ整係数 2 元 2 次形式を考える．このとき，類数 $h(D)=2$ であり，同値でない整係数 2 元 2 次形式は次の 2 つがある．

(i) ${m_1}^2 + m_1 m_2 + 4{m_2}^2$

(ii) $2{m_1}^2 + m_1 m_2 + 2{m_2}^2$

したがって，次のように，ϑ 関数が 2 つ構成できる．

$$\begin{aligned} \vartheta_1(z) &= \sum_{m_1,m_2\in\mathbb{Z}^2} \exp(2\pi i({m_1}^2 + m_1 m_2 + 4{m_2}^2)z) \\ \vartheta_2(z) &= \sum_{m_1,m_2\in\mathbb{Z}^2} \exp(2\pi i(2{m_1}^2 + m_1 m_2 + 2{m_2}^2)z) \end{aligned}$$

これらは，いずれも指標 $\chi(d) = \left(\dfrac{-15}{d}\right)$ をもつ $\Gamma_0(N)$ に関する weight 1 の modular form である．

また，$q = exp(2\pi i z)$ とおくと，$\vartheta_1(z), \vartheta_1(z)$ は次のような q についてのベキ級数になる．

$$\begin{aligned} \vartheta_1(z) &= 1 + 2q + 6q^4 \cdots \\ \vartheta_2(z) &= 1 + 4q^2 + 2q^3 \cdots \end{aligned}$$

したがって，$\vartheta_1(z) = k\vartheta_2(z)$ または $\vartheta_2(z) = l\vartheta_1(z)$ なる，k, l は存在しないので，$\vartheta_1(z), \vartheta_2(z)$ は互いに独立であることがわかる．

3　η 関数

3.1　η 関数の性質

$\mathfrak{H}$ 上定義された関数

$$\eta(z) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n), \quad q = e^{2\pi i z} \quad (z \in \mathfrak{H})$$

を Dedekind の η 関数と呼ぶ. η 関数は次の命題のような解析的な性質を持っている.

命題 3.1.1
$\eta(z)$ は広義一様に絶対収束し，$\mathfrak{H}$ 上に零点を持たない.

証明
$z \in \mathfrak{H}$ であるから，$|q| < 1$．よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |q^n|$ は収束し，$\eta(z)$ は広義一様に絶対収束する.

さて，$q^{\frac{1}{24}} = x$ とおき，$\eta(z)$ を x で形式的にべき級数展開すると次のようになる.

$$\begin{aligned}
\eta(\tau) \;\; = \;\; & x - x^{25} - x^{49} + x^{121} + x^{169} - x^{289} - x^{361} + x^{529} + x^{625} - x^{841} - x^{961} + x^{1225} \\
& + x^{1369} - x^{1681} - x^{1849} + x^{2209} + x^{2401} - x^{2809} - x^{3025} + x^{3481} + x^{3721} - x^{4225} \\
& - x^{4489} + x^{5041} + x^{5329} - x^{5929} - x^{6241} + x^{6889} + x^{7225} - x^{7921} - x^{8281} + x^{9025} \\
& + x^{9409} - x^{10201} - x^{10609} + x^{11449} + x^{11881} - x^{12769} - x^{13225} + x^{14161} + x^{14641} \\
& - x^{15625} - x^{16129} + x^{17161} + x^{17689} - x^{18769} - x^{19321} + x^{20449} + x^{21025} - x^{22201} \\
& - x^{22801} + O\left(x^{24001}\right)
\end{aligned}$$

このように x の指数はすべて平方数になっていることが観察される．一般に，$\eta(z)$ は次のような x のべき級数

$$\eta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n^2}$$

に展開され，係数 a_n は次式で与えられることが知られている.

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \equiv 1, 11 \pmod{12} \\ -1, & n \equiv 5, 7 \pmod{12} \\ 0, & (n, 12) \neq 1 \end{cases}$$

さて，$\eta(az) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{am^2}, \eta(bz) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{bn^2}$ とおけば，

$$\begin{aligned}
\eta(az)\eta(bz) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} a_m a_n x^{am^2+bn^2} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k
\end{aligned}$$

となる．ここで，$b_k = \displaystyle\sum_{k=am^2+bn^2} a_m a_n$ である．

さて，$d = \gcd(a+b, 24)$ とおくと，次の命題が成立する．

命題 3.1.2

$$am^2 + bn^2 \equiv 0 \pmod d$$

証明

$a_n \neq 0 \Longrightarrow n \equiv 1, 5, 7, 11 (\mathrm{mod}\ 12) \Longrightarrow n^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 24)$ であるので,

$$am^2 + bn^2 \equiv a + b (\mathrm{mod}\ 24) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ d)$$

したがって，$x^d = y$ と置き換えれば，$f(z) = \eta(az)\eta(bz)$ は y についてのベキ級数になる．すなわち,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y^k$$

さて，$d_0 = \frac{24}{d}$ とおけば，$y = q^{\frac{1}{d_0}}$ となるので，$f(z)$ が y についてのベキ級数で展開できるということは，$f(d_0 z)$ が q についてのベキ級数に展開できることに他ならない．

さて，これから，Riemann 面 $(\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}^*)$ の種数が 1 となる $N = 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 24, 27, 32, 36, 49$ の各場合について，$\eta(mz)\eta(nz)$(ただし $N = mn$) なる η 関数 2 つの積を考える．以下に，考察の対象とする η 関数の組み合わせをまとめる (他にも組み合わせは考えられるが，今回は以下の場合に限定する)．

(1) $N = 11$ の場合

$\eta(z)\eta(11z), \quad d = \gcd(1 + 11, 24) = 12, \quad d_0 = 2$

したがって，$y = x^2 = q^{\frac{1}{2}}$ でベキ級数展開すると次のようになる．

$\eta(z)\eta(11z)$

$= y - y^3 - y^5 + y^{11} + y^{15} - y^{23} + y^{27} - y^{31} - y^{33} - y^{37} + 2y^{47} + y^{49} + 2y^{53} - y^{55} - y^{59} - y^{67} + y^{69} - y^{71} - y^{81} - y^{89} + y^{93} - y^{97} + 2y^{103} + y^{111} - y^{113} + y^{115} + y^{121} + y^{125} - y^{135} - y^{137} - 2y^{141} - y^{147} + y^{155} - y^{157} - 2y^{159} + 2y^{163} + y^{165} + y^{169} + y^{177} - y^{179} - y^{181} + y^{185} - y^{191} + 2y^{199} + O(y^{200})$

なお，このベキ級数の係数にみられる代数的性質については，井畑 [4]p.33 参照のこと．

(2) N=14 の場合

$\eta(z)\eta(14z), \quad d = \gcd(1 + 14, 24) = 3, \quad d_0 = 8$

$\eta(2z)\eta(7z), \quad d = \gcd(2 + 7, 24) = 3, \quad d_0 = 8$

したがって，$y = x^3 = q^{\frac{1}{8}}$ でベキ級数展開すると次のようになる．

$\eta(z)\eta(14z)$

$= y^5 - y^{13} - y^{21} + y^{45} + y^{61} - y^{101} - y^{117} + y^{133} - y^{157} - y^{173} + y^{181} + 2y^{213} - y^{229} + 2y^{237} + y^{245} - y^{269} - 2y^{285} - y^{293} - y^{325} + y^{349} + y^{397} - y^{405} + y^{413} + y^{461} + y^{509} - y^{525} + y^{549} - 2y^{573} - y^{581} + y^{605} - y^{637} - y^{661} + y^{677} - 2y^{685} + y^{733} + 2y^{741} + y^{773} + 2y^{789} - y^{797} + y^{829} + O(y^{840})$

$\eta(2z)\eta(7z)$

$= y^3 - y^{19} - y^{35} - y^{59} + y^{75} + y^{83} + y^{91} + y^{131} - y^{139} + y^{147} - y^{171} - 2y^{195} - y^{227} - y^{243} + y^{251} + y^{283} + y^{307} - y^{315} + 2y^{355} + y^{363} + 2y^{395} - 2y^{411} + y^{419} - y^{427} - y^{467} - y^{475} + y^{507} - y^{523} - y^{531} - y^{563} - y^{587} + y^{619} - y^{643} + y^{691} + 2y^{699} + y^{707} + y^{747} - y^{787} + y^{811} + y^{819} + O(y^{840})$

(3) N=15 の場合

$\eta(z)\eta(15z), \quad d = \gcd(1+15, 24) = 8, \quad d_0 = 3$

$\eta(3z)\eta(5z), \quad d = \gcd(3+5, 24) = 8, \quad d_0 = 3$

したがって，$y = x^8 = q^{\frac{1}{3}}$ でベキ級数展開すると次のようになる．

$\eta(z)\eta(15z)$

$= y^2 - y^5 - y^8 + y^{17} + y^{23} - y^{38} - 2\,y^{47} + y^{50} + y^{53} - y^{62} + y^{80} + y^{83} + y^{95} + y^{98} - 2y^{107} - 2y^{113} - y^{122} - y^{125} + y^{128} + y^{137} + y^{152} + y^{155} - y^{158} + y^{167} - y^{170} + y^{173} + y^{197} - y^{200} - y^{218} + y^{227} - y^{230} - 2y^{233} + y^{242} - y^{245} + y^{248} + y^{257} - 2y^{263} - y^{272} + 2y^{278} + y^{293} + 2y^{302} + O(y^{305})$

$\eta(3z)\eta(5z)$

$= y - y^{10} - y^{16} - y^{19} + y^{25} - y^{31} + y^{34} + y^{40} + y^{46} + y^{49} - y^{61} + y^{64} - y^{79} - y^{85} - 2y^{94} + y^{106} - y^{109} - y^{115} + y^{121} - y^{136} + 2y^{139} + 2y^{151} + y^{166} + y^{169} - y^{181} - y^{184} + y^{190} + 2y^{199} - y^{211} - 2y^{214} - 2y^{226} - y^{229} + 2y^{235} - y^{241} - y^{250} - y^{265} - y^{271} + y^{274} + y^{304} + y^{310} + O(y^{330})$

(4) N=17 の場合

$\eta(z)\eta(17z), \quad d = \gcd(1+17, 24) = 6, \quad d_0 = 4$

したがって，$y = x^6 = q^{\frac{1}{4}}$ でベキ級数展開すると次のようになる．

$\eta(z)\eta(17z)$

$= y^3 - y^7 - y^{11} + y^{23} + y^{31} - y^{51} - y^{63} - y^{71} + y^{75} + y^{79} - y^{99} + y^{107} + y^{119} + y^{131} - y^{139} + y^{147} - 2y^{159} - y^{163} - y^{167} - y^{175} + y^{187} + y^{199} + y^{207} + y^{211} - y^{227} + 2y^{231} - y^{243} - y^{275} + y^{279} - y^{283} - y^{311} - y^{347} + y^{363} - y^{367} + 2y^{371} + y^{379} - y^{391} + y^{419} + y^{431} - y^{439} + O(y^{445})$

(5) N=19 の場合

$\eta(z)\eta(19z), \quad d = \gcd(1+19, 24) = 4, \quad d_0 = 6$

したがって，$y = x^4 = q^{\frac{1}{6}}$ でベキ級数展開すると次のようになる．

$\eta(z)\eta(19z)$

$= y^5 - y^{11} - y^{17} + y^{35} + y^{47} - y^{77} - y^{95} - y^{119} + y^{125} + y^{131} + y^{137} - y^{149} + y^{191} + y^{209} - y^{215} - y^{233} + y^{239} - y^{251} - y^{263} - 2y^{275} + y^{305} + y^{311} + y^{323} + y^{329} + y^{347} + y^{359} - y^{365} - y^{389} - 2y^{425} + y^{443} - y^{461} - y^{467} + y^{473} + y^{557} - y^{587} + 2y^{605} + y^{617} - y^{647} + y^{653} - y^{665} - y^{671} + y^{695} - y^{719} + y^{731} + O(y^{760})$

(6) N=20 の場合

$\eta(2z)\eta(10z),\quad d=\gcd(2+10,24)=12,\quad d_0=2$

したがって，$y=x^{12}=q^{\frac{1}{2}}$ でベキ級数展開すると次のようになる．

$\eta(2z)\eta(10z)$

$= y - y^5 - y^9 + y^{25} + 2y^{29} - 2y^{41} + y^{45} - y^{49} - 2y^{61} + y^{81} + 2y^{89} + 2y^{101} - 2y^{109} + y^{121} - y^{125} - 2y^{145} - 2y^{149} + y^{169} + 2y^{181} + 2y^{205} - y^{225} + 2y^{229} - 2y^{241} + y^{245} - 2y^{261} - 2y^{269} - 2y^{281} + y^{289} + 2y^{305} + 2y^{349} + y^{361} + 2y^{369} - 2y^{389} + 2y^{401} - y^{405} - 2y^{409} - 2y^{421} + O(y^{440})$

なお，このベキ級数の係数にみられる代数的性質については，井畑 [4]p.21 参照のこと．

(7) N=21 の場合

$\eta(z)\eta(21z),\quad d=\gcd(1+21,24)=2,\quad d_0=12$

$\eta(3z)\eta(7z),\quad d=\gcd(3+7,24)=2,\quad d_0=12$

したがって，$y=x^2=q^{\frac{1}{12}}$ でベキ級数展開すると次のようになる．

$\eta(z)\eta(21z)$

$= y^{11} - y^{23} - y^{35} + y^{71} + y^{95} - y^{155} - y^{191} - y^{263} + 2y^{275} + y^{287} - y^{347} + y^{407} - y^{431} + y^{443} - y^{491} - y^{515} + y^{539} - 2y^{575} - y^{599} + y^{623} + y^{659} + y^{683} + 2y^{695} + y^{743} - y^{779} - y^{827} - y^{851} - y^{875} - y^{947} + y^{995} + O(y^{1000})$

$\eta(3z)\eta(7z)$

$= y^5 - y^{41} - y^{77} - y^{89} + y^{125} + y^{161} - y^{173} + y^{185} + y^{209} + y^{245} + y^{257} - y^{269} - y^{341} - y^{353} - y^{437} - y^{461} - y^{497} + y^{521} - y^{545} + y^{593} + 2y^{605} - y^{665} + y^{677} + y^{713} + y^{773} + y^{797} + y^{845} - y^{857} - y^{881} + y^{941} - 2y^{965} + O(y^{1000})$

(8) N=24 の場合

$\eta(2z)\eta(12z),\quad d=\gcd(2+12,24)=2,\quad d_0=12$

$\eta(4z)\eta(6z),\quad d=\gcd(4+6,24)=2,\quad d_0=12$

したがって，$y=x^2=q^{\frac{1}{12}}$ でベキ級数展開すると次のようになる．

$\eta(2z)\eta(12z)$

$= y^7 - y^{31} - y^{55} + y^{127} - y^{151} + 2y^{175} + y^{199} - y^{271} - 2y^{295} + y^{343} - y^{367} - y^{415} + y^{439} - y^{463} + y^{511} + y^{535} + y^{583} + y^{631} + y^{655} - y^{679} + y^{727} - y^{751} - 2y^{775} - y^{823} + y^{895} - y^{919} - y^{967} + y^{991} - y^{1039} - y^{1063} - y^{1087} + y^{1111} + 2y^{1135} + y^{1183} + y^{1231} + 2y^{1255} - y^{1303} + y^{1351} - y^{1375} + O(y^{1500})$

$\eta(4z)\eta(6z)$

$= y^5 - y^{53} - y^{77} - y^{101} + y^{125} - y^{149} + y^{173} + y^{197} + 2y^{245} - y^{317} + y^{341} + y^{365} - y^{389} - 2y^{413} - y^{461} - y^{485} + y^{509} - y^{557} - y^{581} + y^{653} + y^{701} + y^{749} + y^{797} + y^{845} + y^{917} - y^{941} + y^{965} + y^{1061} - 3y^{1085} - y^{1109} + y^{1181} - 2y^{1205} - y^{1229} + y^{1253} - 2y^{1325} - y^{1397} + y^{1445} + O(y^{1500})$

(9) N=27 の場合

$\eta(3z)\eta(9z)$, $d=\gcd(3+9,24)=12, \quad d_0=2$

したがって，$y=x^{12}=q^{\frac{1}{2}}$ でベキ級数展開すると次のようになる．

$\eta(3z)\eta(9z)$

$= y - y^{7} - y^{13} - y^{19} + y^{25} + 2y^{31} - y^{37} + 2y^{43} - y^{61} - y^{67} - y^{73} - y^{79} + y^{91} - y^{97} - y^{103} + 2y^{109} + y^{121} + 2y^{127} + y^{133} - y^{139} - y^{151} + 2y^{157} - y^{163} - y^{175} - y^{181} - y^{193} - y^{199} - y^{211} - 2y^{217} + 2y^{223} + 2y^{229} - y^{241} + y^{247} + y^{259} - y^{271} + 2y^{277} + 2y^{283} + y^{289} - 2y^{301} + 2y^{307} + O(y^{310})$

なお，このベキ級数の係数にみられる代数的性質については，井畑 [4]p.29 参照のこと．

(10) N=32 の場合

$\eta(4z)\eta(8z), \quad d=\gcd(4+8,24)=12, \quad d_0=2$

したがって，$y=x^{12}=q^{\frac{1}{2}}$ でベキ級数展開すると次のようになる．

$\eta(4z)\eta(8z)$

$= y - y^{9} - 2y^{17} + y^{25} + 2y^{41} + y^{49} - 2y^{73} + y^{81} - 2y^{89} - 2y^{97} + 2y^{113} - y^{121} + 2y^{137} + 2y^{153} + y^{169} - 2y^{193} - y^{225} - 2y^{233} - 2y^{241} + 2y^{257} - 2y^{281} + 3y^{289} + 2y^{313} + 2y^{337} + 2y^{353} - y^{361} - 2y^{369} - 2y^{401} + 2y^{409} - 2y^{425} - 2y^{433} - y^{441} - 2y^{449} + 2y^{457} + 2y^{521} + y^{529} + 2y^{569} + 2y^{577} + 2y^{593} + O(y^{600})$

なお，このベキ級数の係数にみられる代数的性質については，井畑 [4]p.17 参照のこと．

(11) N=36 の場合

$\eta(6z)^2, \quad d=\gcd(6+6,24)=12, \quad d_0=2$

したがって，$y=x^{12}=q^{\frac{1}{2}}$ でベキ級数展開すると次のようになる．

$\eta(6z)^2$

$= y - 2y^{13} - y^{25} + 2y^{37} + y^{49} + 2y^{61} - 2y^{73} - 2y^{97} - 2y^{109} + y^{121} + 2y^{157} + 3y^{169} - 2y^{181} + 2y^{193} - 2y^{229} - 2y^{241} - 2y^{277} - y^{289} + 2y^{313} + 2y^{325} - 2y^{337} + 2y^{349} + y^{361} + 2y^{373} + 2y^{397} - 2y^{409} - 2y^{421} + 2y^{433} - 2y^{457} - 4y^{481} + y^{529} - 2y^{541} + 2y^{577} + 2y^{601} + 2y^{613} + y^{625} + O(y^{630})$

なお，このベキ級数の係数にみられる代数的性質については，井畑 [4]p.5 参照のこと．

(12) N=49 の場合

$\eta(z)\eta(49z), \quad d=\gcd(1+49,24)=2, \quad d_0=12$

$\eta(7z)^2, \qquad d=\gcd(7+7,24)=2, \quad d_0=12$

したがって，$y=x^{2}=q^{\frac{1}{12}}$ でベキ級数展開すると次のようになる．

$\eta(z)\eta(49z)$

$= y^{25} - y^{37} - y^{49} + y^{85} + y^{109} - y^{169} - y^{205} + y^{289} + y^{337} - y^{445} - y^{505} - y^{613} + y^{625} + 2y^{637} - y^{673} - y^{697} + y^{709} + y^{757} + y^{793} - y^{865} - y^{877} - y^{925} - y^{949} + y^{1033} + y^{1093} + y^{1129} - y^{1201} + y^{1213} + y^{1225} - y^{1261} - y^{1285} - y^{1297} + y^{1345} + y^{1381} - y^{1429} + y^{1453} - y^{1465} - y^{1513} + O(y^{1620})$

$\eta(7z)^2$
$= y^7 - 2y^{91} - y^{175} + 2y^{259} + y^{343} + 2y^{427} - 2y^{511} - 2y^{679} - 2y^{763} + y^{847} + 2y^{1099} + 3y^{1183} - 2y^{1267} + 2y^{1351} - 2y^{1603} - 2y^{1687} - 2y^{1939} - y^{2023} + 2y^{2191} + 2y^{2275} - 2y^{2359} + 2y^{2443} + y^{2527} + 2y^{2611} + 2y^{2779} - 2y^{2863} - 2y^{2947} + O(y^{3000})$

3.2 η 関数の変換公式

まず，η 関数は次の関数等式を満たす．

命題 3.2.1

$$\begin{aligned}\eta(z+1) &= \exp\left(\frac{\pi i}{12}\right)\eta(z)\\ \eta\left(-\frac{1}{z}\right) &= \sqrt{\frac{z}{i}}\,\eta(z)\end{aligned}$$

ただし，$\sqrt{\frac{z}{i}}$ の偏角 θ は, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする．

証明
$\eta(z+1)$ の変換については，η 関数の定義から明らかである．$\eta\left(-\frac{1}{z}\right)$ の変換についての証明は土井・三宅 [2]p.146 の補題 4.4.1 を参照のこと．Weil による証明が紹介されている．

一般の $SL_2(\mathbb{Z})$ による変換公式に入る前に，まず，以下の記号を定義しておく．

定義 3.2.2
$c, d \in \mathbb{Z}, (c,d) = 1, c \neq 0, d : \mathrm{odd}$ のとき，

$$\begin{aligned}\left(\frac{c}{d}\right)^* &= \left(\frac{c}{|d|}\right),\\ \left(\frac{c}{d}\right)_* &= \left(\frac{c}{|d|}\right)(-1)^{(\mathrm{sign}(c)-1)(\mathrm{sign}(d)-1)/4}.\end{aligned}$$

ここで右辺の $\left(\frac{*}{*}\right)$ は，Jacobi 記号であり，sign(n)=$\frac{n}{|n|}$ を表す．また，c, d が共に odd のとき，

$$\left(\frac{d}{|c|}\right) = \left(\frac{c}{d}\right)_* (-1)^{(c-1)(d-1)/4}$$

となる．また，

$$\left(\frac{0}{\pm 1}\right)^* = \left(\frac{0}{\pm 1}\right)_* = 1$$

と定める．

さらに，Jacobi 記号，$\left(\frac{a}{b}\right)$ を b が even の時にも拡張して次のように定義する．

定義 3.2.3

$$b : \text{even},\ b > 0,\ a \equiv 1 (\text{mod} 4) \text{ のとき}, \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{b}{|a|}\right)$$

また，Jacobi 記号，$\left(\frac{a}{b}\right)$ を b が負の場合にも拡張して次のように定義する．

定義 3.2.4

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \text{sign} b \left(\frac{a}{|b|}\right)$$

以上の表記法に従い，次の変換公式を得る．

定理 3.2.5 (Petersson)
$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して，

$$\eta(Mz) = \eta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \epsilon(a,b,c,d)\sqrt{cz+d}\ \eta(z).$$

ここで

$$\epsilon(a,b,c,d) = \begin{cases} \left(\dfrac{d}{c}\right)^{*} \exp\left(\dfrac{\pi i}{12}((a+d-bdc-3)c+bd)\right) & , \quad (c : \text{odd}) \\ \left(\dfrac{c}{d}\right)_{*} \exp\left(\dfrac{\pi i}{12}((a-2d-bdc)c+bd+3d-3)\right) & , \quad (c : \text{even}). \end{cases}$$

この変換公式を用いて，$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ による $f(z) = \eta(mz)\eta(nz), (N = mn)$ の変換を考える．まず，

$$\begin{aligned} \eta(\sigma(mz)) &= \eta\left(\frac{maz+mb}{Ncz+d}\right) \\ &= \eta\left(\frac{a(mz)+mb}{nc(mz)+d}\right) \\ &= \epsilon(a,mb,nc,d)\sqrt{Ncz+d}\ \eta(mz). \end{aligned}$$

同様にして，$\eta(\sigma(nz)) = \epsilon(a,nb,mc,d)\sqrt{Ncz+d}\ \eta(nz)$．よって，$f(z)$ を σ で変換すると，

$$f(\sigma z) = \epsilon(a,mb,nc,d)\epsilon(a,nb,mc,d)(Ncz+d)f(z)$$

となる．ここで $\epsilon(a,mb,nc,d)\epsilon(a,nb,mc,d) = \chi\begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix}$ とおいて，各 η の積に対して，χ を具体的に求めてみる．

(I) $c=0$ のとき，

このとき，$a=d=1$，または $a=d=-1$ である．したがって，

$$\begin{aligned}\epsilon(1,mb,0,1) &= \left(\frac{0}{1}\right)_* \exp\left(\frac{\pi i}{12}mb\right)\\ \epsilon(1,nb,0,1) &= \left(\frac{0}{1}\right)_* \exp\left(\frac{\pi i}{12}nb\right)\end{aligned}$$

となるので，

$$\chi\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \exp\left(\frac{\pi i(m+n)}{12}b\right)$$

また，

$$\begin{aligned}\epsilon(-1,mb,0,-1) &= \left(\frac{0}{-1}\right)_* \exp\left(\frac{\pi i}{12}(-mb-6)\right)\\ \epsilon(-1,nb,0,-1) &= \left(\frac{0}{-1}\right)_* \exp\left(\frac{\pi i}{12}(-nb-6)\right)\end{aligned}$$

となるので，

$$\chi\begin{pmatrix}-1 & b\\ 0 & -1\end{pmatrix} = -\exp\left(-\frac{\pi i(m+n)}{12}b\right)$$

(II) $c\neq 0$ のとき，

(i) m,n が共に even のとき，

$$\begin{aligned}\epsilon(a,mb,nc,d) &= \left(\frac{nc}{d}\right)_* \exp\left(\frac{\pi i}{12}((a-2d-Nbdc)nc+mbd+3d-3)\right)\\ \epsilon(a,nb,mc,d) &= \left(\frac{mc}{d}\right)_* \exp\left(\frac{\pi i}{12}((a-2d-Nbdc)mc+nbd+3d-3)\right)\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}\chi\begin{pmatrix}a & b\\ Nc & d\end{pmatrix} &= \left(\frac{nc}{d}\right)_*\left(\frac{mc}{d}\right)_* \exp\left(\frac{\pi i(m+n)}{12}((a-2d-Nbdc)c+bd)\right)\exp\left(\frac{\pi i}{2}(d-1)\right)\\ &= \left(\frac{N}{|d|}\right)(-1)^{\frac{d-1}{2}}\exp\left(\frac{\pi i(m+n)}{12}((a-2d-Nbdc)c+bd)\right)\\ &= \left(\frac{-N}{d}\right)\exp\left(\frac{\pi i(m+n)}{12}((a-2d-Nbdc)c+bd)\right)\end{aligned}$$

(ii) m,n が共に odd のとき．

c が even のときは (i) に同じであり，c が odd のときは，

$$\begin{aligned}\epsilon(a,mb,nc,d) &= \left(\frac{d}{nc}\right)^* \exp\left(\frac{\pi i}{12}((a+d-Nbdc-3)nc+mbd)\right)\\ \epsilon(a,nb,mc,d) &= \left(\frac{d}{mc}\right)^* \exp\left(\frac{\pi i}{12}((a+d-Nbdc-3)mc+nbd)\right)\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}\chi\begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} &= \left(\frac{d}{nc}\right)^{*}\left(\frac{d}{mc}\right)^{*}\exp\left(\frac{\pi i(m+n)}{12}((a+d-Nbdc-3)c+bd)\right) \\ &= \left(\frac{d}{N}\right)\exp\left(\frac{\pi i(m+n)}{12}((a+d-Nbdc-3)c+bd)\right)\end{aligned}$$

(iii) m が odd, n が even のとき．
c が even のときは (i) に同じであり，c が odd のときは，

$$\begin{aligned}\epsilon(a,mb,nc,d) &= \left(\frac{nc}{d}\right)_{*}\exp\left(\frac{\pi i}{12}((a-2d-Nbdc)nc+mbd+3d-3)\right) \\ \epsilon(a,nb,mc,d) &= \left(\frac{d}{mc}\right)^{*}\exp\left(\frac{\pi i}{12}((a+d-Nbdc-3)mc+nbd)\right)\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}\chi\begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} &= \left(\frac{nc}{d}\right)_{*}\left(\frac{mc}{d}\right)^{*}\exp\left(\frac{\pi i(m+n)}{12}((ac+cd+bd-Nbdc^2)\right) \\ &\qquad\qquad \times\exp\left(\frac{\pi i}{4}(-ncd+d-mc-1)\right) \\ &= \left(\frac{N}{|d|}\right)\exp\left(\frac{\pi i(m+n)}{12}((ac+cd+bd-Nbdc^2)\right) \\ &\qquad\qquad \times\exp\left(\frac{\pi i}{4}((m-n)cd-2mc)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\because \left(\frac{nc}{d}\right)_{*}\left(\frac{d}{mc}\right)^{*} &= \left(\frac{nc}{d}\right)_{*}\left(\frac{d}{|mc|}\right) \\ &= \left(\frac{nc}{d}\right)_{*}\left(\frac{mc}{d}\right)_{*}(-1)^{(mc-1)(d-1)/4} \\ &= \left(\frac{nc}{d}\right)_{*}\left(\frac{mc}{d}\right)_{*}\exp\left(\frac{\pi i}{4}(mc-1)(d-1)\right)\end{aligned}$$

定義 3.2.6
以上のように定めた χ を，η 関数の積から定まる $\Gamma_0(N)$ 上の指標と呼ぶ．すなわち χ は，

$$\begin{array}{cccc} \chi: & \Gamma_0(N) & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\times} \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \chi\begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix}\end{array}$$

で定まる群準同型である．

したがって，この指標 χ に対して，次の命題が成立する．

命題 3.2.7
$f(z)=\eta(mz)\eta(nz)$, $\sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ とする $(N=mn)$．このとき，$f(z)$ は指標 χ を持つ $\Gamma_0(N)$ に関する weight 1 の modular form である．つまり，

$$f(\sigma z)=\chi(\sigma)(Ncz+d)f(z).$$

が，$\forall\sigma\in\Gamma_0(N)$ に対して成立する．

3.3 η 関数の積で構成された保型形式の指標

それでは，具体的に各 N に対して指標 $\chi(\sigma)$ を定めていくことにする．σ は上の命題の通りとする．

(1) N=11 の場合

$f_1(z)=\eta(z)\eta(11z)$ の指標を $\chi_1(\sigma)$ とおく．

(i) $c\equiv 1 \pmod 2$ のとき，

$$\begin{aligned}\chi_1(\sigma) &= \left(\frac{d}{11}\right)\exp\left(\pi i((a+d-11bdc-3)c+bd)\right) \\ &= \left(\frac{d}{11}\right)(-1)^{a+d+1} \\ &= \left(\frac{-11}{d}\right)(-1)^{a+d+1}\end{aligned}$$

(ii) $c\equiv 0 \pmod 2$ のとき，

$$\begin{aligned}\chi_1(\sigma) &= \left(\frac{-11}{d}\right)\exp\left(\pi i((a-2d-11bdc)c+bd)\right) \\ &= \left(\frac{-11}{d}\right)(-1)^{b}\end{aligned}$$

$(\because ad-11bc=1, c\equiv 0 \pmod 2$ より $ad\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$.よって $d\equiv 1(\mathrm{mod}2))$

ここで，

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}(\sigma) &= \begin{cases} (-1)^{a+d+1} & , \quad c\equiv 1 \pmod 2. \\ (-1)^{b} & , \quad c\equiv 0 \pmod 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} +1 \quad , \quad \sigma\equiv \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix} \pmod 2 \\ -1 \quad , \quad \sigma\equiv \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} \pmod 2 \end{cases}\end{aligned}$$

とおく．これは，

$$\mathrm{sgn} \quad : \quad SL(2,\mathbb{Z}) \quad \underset{\mathrm{mod}2}{\rightarrow} \quad SL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \quad \cong \quad S_3 \quad \underset{\mathrm{sgn}}{\rightarrow} \quad \{+1,-1\}$$

を意味する．

これにより，N=11 の場合の指標 $\chi_1(\sigma)$ は，

$$\chi_1\begin{pmatrix} a & b \\ 11c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{-11}{d}\right)\mathrm{sgn}(\sigma)$$

と定まる．

N=27 の場合 $(\eta(3z)\eta(9z))$ も，N=11 の場合と同様である．

(2) N=20 の場合

$f_1(z) = \eta(2z)\eta(10z)$ の指標を $\chi_1(\sigma)$ とおく．

$$\begin{aligned}\chi_1(\sigma) \quad &= \quad \left(\frac{-20}{d}\right)\exp\left(\pi i((a-2d-20bdc)c+bd)\right) \\ &= \quad \left(\frac{-5}{d}\right)(-1)^{ac+bd} \\ &= \quad \left(\frac{-5}{d}\right)(-1)^{b+c}\end{aligned}$$

$(\because ad-20bc=1$ より，$ad \equiv 1 \pmod 2$．よって，$a \equiv d \equiv 1 \pmod 2)$

よって，N=20 の場合の指標 $\chi_1(\sigma)$ は，

$$\chi_1\begin{pmatrix} a & b \\ 20c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{-5}{d}\right)(-1)^{b+c}$$

と定まる．N=32 の場合 $(\eta(4z)\eta(8z))$，N=36 の場合 $(\eta(6z)^2)$ も，N=20 の場合と同様である．

(3) N=15 の場合

$f_1(z) = \eta(z)\eta(15z)$ の指標を $\chi_1(\sigma)$, $f_2(z) = \eta(3z)\eta(5z)$ の指標を $\chi_2(\sigma)$ とおく．

(i) $c \equiv 1 \pmod 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
\chi_1(\sigma) &= \left(\frac{d}{15}\right)\exp\left(\frac{16\pi i}{12}((a+d-15bdc-3)c+bd)\right) \\
&= \left(\frac{d}{15}\right)\exp\left(-\frac{2\pi i}{3}(ac+cd+bd)\right) \\
&= \left(\frac{-15}{d}\right)\exp\left(-\frac{2\pi i}{3}(ac+cd+bd)\right) \\
\chi_2(\sigma) &= \left(\frac{d}{15}\right)\exp\left(\frac{8\pi i}{12}((a+d-15bdc-3)c+bd)\right) \\
&= \left(\frac{d}{15}\right)\exp\left(\frac{2\pi i}{3}(ac+cd+bd)\right) \\
&= \left(\frac{-15}{d}\right)\exp\left(\frac{2\pi i}{3}(ac+cd+bd)\right)
\end{aligned}$$

(ii) $c \equiv 0 \pmod 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
\chi_1(\sigma) &= \left(\frac{-15}{d}\right)\exp\left(\frac{16\pi i}{12}((a-2d-15bdc)c+bd)\right) \\
&= \left(\frac{-15}{d}\right)\exp\left(\frac{-2\pi i}{3}(ac+cd+bd)\right) \\
\chi_2(\sigma) &= \left(\frac{-15}{d}\right)\exp\left(\frac{8\pi i}{12}((a-2d-15bdc)c+bd)\right) \\
&= \left(\frac{-15}{d}\right)\exp\left(\frac{2\pi i}{3}(ac+cd+bd)\right)
\end{aligned}$$

よって，N=15 の場合の指標 $\chi_1(\sigma), \chi_2(\sigma)$ は, 任意の c に対して，

$$\begin{aligned}
\chi_1\begin{pmatrix} a & b \\ 15c & d \end{pmatrix} &= \left(\frac{-15}{d}\right)\exp\left(-\frac{2\pi i}{3}(ac+cd+bd)\right) \\
\chi_2\begin{pmatrix} a & b \\ 15c & d \end{pmatrix} &= \left(\frac{-15}{d}\right)\exp\left(\frac{2\pi i}{3}(ac+cd+bd)\right)
\end{aligned}$$

と定まる．なお，このとき，$\chi_1(\sigma)\chi_2(\sigma) = 1$，すなわち，$\chi_1(\sigma) = \overline{\chi_2(\sigma)}$ が成立している．

(4) N=17 の場合

$f_1(z) = \eta(z)\eta(17z)$ の指標を $\chi_1(\sigma)$ とおく．

(i) $c \equiv 1 \pmod 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
\chi_1(\sigma) &= \left(\frac{d}{17}\right)\exp\left(\frac{18\pi i}{12}((a+d-17bdc-3)c+bd)\right) \\
&= \left(\frac{d}{17}\right)\exp\left(-\frac{\pi i}{2}(ac+cd+c)\right)
\end{aligned}$$

$$(\because c \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2) \text{ より}, c^2 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4))$$

(ii) $c \equiv 0 \pmod 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
\chi_1(\sigma) &= \left(\frac{-17}{d}\right)\exp\left(\frac{18\pi i}{12}((a-2d-17bdc)c+bd)\right) \\
&= \left(\frac{-17}{d}\right)\exp\left(-\frac{\pi i}{2}(ac+bd)\right) \\
&= \left(\frac{d}{17}\right)\left(\frac{-1}{d}\right)\exp\left(-\frac{\pi i}{2}(ac+bd)\right)
\end{aligned}$$

$$(\because c \equiv 0 \pmod 2 \text{ より}, 2c \equiv c^2 \equiv 0 \pmod 4)$$

ここで，次のような符号 $\mathrm{sgn}'(\sigma)$ を導入する．

$$\begin{aligned}
\mathrm{sgn}'(\sigma) &= \begin{cases} e^{-\frac{\pi i}{2}c(a+d+1)} & , \quad c \equiv 1 \pmod 2 \\ \left(\frac{-1}{d}\right) e^{-\frac{\pi i}{2}(ac+bd)} & , \quad c \equiv 0 \pmod 2. \end{cases} \\
&= \begin{cases}
+1 \quad , \quad \sigma \equiv & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&0\\2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&2\\0&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\3&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&1\\3&0\end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix}0&3\\1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&3\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&3\\3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&3\\3&1\end{pmatrix} (\mathrm{mod} 4) \\
+i \quad , \quad \sigma \equiv & \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&3\\0&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&0\\1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&3\\1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix}0&1\\3&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\3&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&2\\3&1\end{pmatrix} (\mathrm{mod} 4) \\
-1 \quad , \quad \sigma \equiv & \begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&3\\1&1\end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&3\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&3\\3&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&3\\3&2\end{pmatrix} (\mathrm{mod} 4) \\
-i \quad , \quad \sigma \equiv & \begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&3\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&3\\2&3\end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&0\\3&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&3\\2&1\end{pmatrix} (\mathrm{mod} 4)
\end{cases}
\end{aligned}$$

とおく．これは，

$$\mathrm{sgn}' \quad : \quad SL(2,\mathbb{Z}) \underset{\mathrm{mod}4}{\longrightarrow} SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/A_4 \cong < i >= \{\pm 1, \pm i\}$$

を意味している．

よって，N=17 の場合の指標 $\chi_1(\sigma)$ は，

$$\chi_1\begin{pmatrix}a & b\\ 17c & d\end{pmatrix} = \left(\frac{d}{17}\right)\mathrm{sgn}'(\sigma)$$

と書くことができる．

なお，$\mathrm{sgn}'(\sigma)=\pm 1$ なる σ を mod 2 で見ると，

$$\sigma\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\pmod 2$$

であり，$\mathrm{sgn}'(\sigma)=\pm i$ なる σ を mod 2 で見ると，

$$\sigma\equiv\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\pmod 2$$

となっている．この mod 2 での σ の分類は，以前に定義した，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ における分類と一致している．このことから，$\mathrm{sgn}'(\sigma)$ と $\mathrm{sgn}(\sigma)$ との関係は，

$$\mathrm{sgn}(\sigma)=\{\mathrm{sgn}'(\sigma)\}^2$$

となることがわかる．

(5) N=19 の場合

$f_1(z)=\eta(z)\eta(19z)$ の指標を $\chi_1(\sigma)$ とおく．

(i) $c\equiv 1\pmod 2$ のとき，

$$\begin{aligned}\chi_1(\sigma)&=\left(\frac{d}{19}\right)\exp\left(\frac{20\pi i}{12}((a+d-19bdc-3)c+bd)\right)\\&=\left(\frac{d}{19}\right)\exp\left(-\frac{\pi i}{3}(ac+cd+bd-19bdc^2)\right)\exp(-5\pi ic)\\&=-\left(\frac{-19}{d}\right)\exp\left(-\frac{\pi i}{3}(ac+cd+bd-bdc^2)\right)\end{aligned}$$

(ii) $c\equiv 0\pmod 2$ のとき，

$$\begin{aligned}\chi_1(\sigma)&=\left(\frac{-19}{d}\right)\exp\left(\frac{20\pi i}{12}((a-2d-19bdc)c+bd)\right)\\&=\left(\frac{-19}{d}\right)\exp\left(-\frac{\pi i}{3}(ac+cd+bd-19bdc^2-3cd)\right)\\&=\left(\frac{-19}{d}\right)\exp\left(-\frac{\pi i}{3}(ac+cd+bd-bdc^2)\right)\end{aligned}$$

$$(\because c\equiv 0\ (\mathrm{mod}2\ )\ \text{より},\ 3cd\equiv 0\pmod 6)$$

よって，N=19 の場合の指標 $\chi_1(\sigma)$ は，

$$\chi_1\begin{pmatrix}a&b\\19c&d\end{pmatrix}=(-1)^c\left(\frac{-19}{d}\right)\exp\left(-\frac{\pi i}{3}(ac+cd+bd-bdc^2)\right)$$

と定まる．

(6) N=14 の場合

$f_1(z)=\eta(z)\eta(14z)$ の指標を $\chi_1(\sigma)$, $f_2(z)=\eta(2z)\eta(7z)$ の指標を $\chi_2(\sigma)$ とおく.

(i) $c\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$ のとき，

$$\begin{aligned}
\chi_1(\sigma) &= \left(\frac{14}{|d|}\right)\exp\left(\frac{15\pi i}{12}(ac+cd+bd-14bdc^2)\right)\exp\left(\frac{\pi i}{4}(-13cd-2c)\right)\\
&= \left(\frac{14}{|d|}\right)\exp\left(\frac{\pi i}{4}(5ac+5cd+5bd-70bdc^2-13cd-2c)\right)\\
&= \left(\frac{14}{|d|}\right)\exp\left(\frac{\pi i}{4}(5ac+5bd+2bdc^2-2c)\right)\\
&= \left(\frac{14}{|d|}\right)\exp\left(\frac{\pi i}{4}(-3ac-bd-2c)\right)\\
\chi_2(\sigma) &= \left(\frac{14}{|d|}\right)\exp\left(\frac{9\pi i}{12}(ac+cd+bd-14bdc^2)\right)\exp\left(\frac{\pi i}{4}(5cd-14c)\right)\\
&= \left(\frac{14}{|d|}\right)\exp\left(\frac{\pi i}{4}(3ac+3cd+3bd-42bdc^2+5cd-14c)\right)\\
&= \left(\frac{14}{|d|}\right)\exp\left(\frac{\pi i}{4}(3ac+3bd-2bdc^2+2c)\right)\\
&= \left(\frac{14}{|d|}\right)\exp\left(\frac{\pi i}{4}(3ac+bd+2c)\right)
\end{aligned}$$

$(\because c\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$ より, $c^2\equiv\ 1(\mathrm{mod}\ 8))$

(ii) $c\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$ のとき，

$$\begin{aligned}
\chi_1(\sigma) &= \left(\frac{-14}{d}\right)\exp\left(\frac{15\pi i}{12}((a-2d-14bdc)c+bd)\right)\\
&= \left(\frac{-14}{d}\right)\exp\left(-\frac{3\pi i}{4}(ac+bd-2cd)\right)\\
\chi_2(\sigma) &= \left(\frac{-14}{d}\right)\exp\left(\frac{9\pi i}{12}((a-2d-14bdc)c+bd)\right)\\
&= \left(\frac{-14}{d}\right)\exp\left(\frac{3\pi i}{4}(ac+bd-2cd)\right)
\end{aligned}$$

$(\because c\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$ より, $14bdc^2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 8))$

よって，N=14 の場合の指標 $\chi_1(\sigma),\chi_2(\sigma)$ は，

$$\chi_1\begin{pmatrix} a & b\\ 14c & d\end{pmatrix}=\begin{cases}\left(\frac{14}{|d|}\right)\exp\left(-\frac{\pi i}{4}(3ac+bd+2c)\right) & ,\quad (c:\mathrm{odd})\\ \left(\frac{-14}{d}\right)\exp\left(\frac{\pi i}{4}(ac+bd-2cd)\right) & ,\quad (c:\mathrm{even})\end{cases}$$

$$\chi_2\begin{pmatrix} a & b\\ 14c & d\end{pmatrix}=\begin{cases}\left(\frac{14}{|d|}\right)\exp\left(\frac{\pi i}{4}(3ac+bd+2c)\right) & ,\quad (c:\mathrm{odd})\\ \left(\frac{-14}{d}\right)\exp\left(-\frac{\pi i}{4}(ac+bd-2cd)\right) & ,\quad (c:\mathrm{even})\end{cases}$$

と定まる．なお，このとき，$\chi_1(\sigma)\chi_2(\sigma)=1$，すなわち，$\chi_1(\sigma)=\overline{\chi_2(\sigma)}$ が成立している．

(7) N=21 の場合

$f_1(z)=\eta(z)\eta(21z)$ の指標を $\chi_1(\sigma)$, $f_2(z)=\eta(3z)\eta(7z)$ の指標を $\chi_2(\sigma)$ とおく．

(i) $c\equiv 1 \pmod 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
\chi_1(\sigma) &= \left(\frac{d}{21}\right)\exp\left(\frac{22\pi i}{12}((a+d-21bdc-3)c+bd)\right)\\
&= \left(\frac{d}{21}\right)\exp\left(\frac{-\pi i}{6}(ac+cd+4bd-3c)\right)\\
\chi_2(\sigma) &= \left(\frac{d}{21}\right)\exp\left(\frac{10\pi i}{12}((a+d-21bdc-3)c+bd)\right)\\
&= \left(\frac{d}{21}\right)\exp\left(\frac{5\pi i}{6}(ac+cd+4bd-3c)\right)
\end{aligned}$$

(ii) $c\equiv 0 \pmod 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
\chi_1(\sigma) &= \left(\frac{-21}{d}\right)\exp\left(\frac{22\pi i}{12}((a-2d-21bdc)c+bd)\right)\\
&= \left(\frac{-21}{d}\right)\exp\left(\frac{-\pi i}{6}(ac+bd-2cd)\right)\\
\chi_2(\sigma) &= \left(\frac{-21}{d}\right)\exp\left(\frac{10\pi i}{12}((a-2d-21bdc)c+bd)\right)\\
&= \left(\frac{-21}{d}\right)\exp\left(\frac{5\pi i}{6}(ac+bd-2cd)\right)
\end{aligned}$$

よって，N=21 の場合の指標 $\chi_1(\sigma),\chi_2(\sigma)$ は，

$$\chi_1\begin{pmatrix} a & b\\ 21c & d\end{pmatrix}=\begin{cases}\left(\frac{d}{21}\right)\exp\left(-\frac{\pi i}{6}(ac+cd+4bd-3c)\right) & ,\quad (c:\mathrm{odd})\\ \left(\frac{-21}{d}\right)\exp\left(-\frac{\pi i}{6}(ac+bd-2cd)\right) & ,\quad (c:\mathrm{even})\end{cases}$$

$$\chi_2\begin{pmatrix} a & b\\ 21c & d\end{pmatrix}=\begin{cases}\left(\frac{d}{21}\right)\exp\left(\frac{5\pi i}{6}(ac+cd+4bd-3c)\right) & ,\quad (c:\mathrm{odd})\\ \left(\frac{-21}{d}\right)\exp\left(\frac{5\pi i}{6}(ac+bd-2cd)\right) & ,\quad (c:\mathrm{even})\end{cases}$$

と定まる．なお，このとき，$\chi_2(\sigma)=\overline{\chi_1(\sigma)^5}$ が成立している．

(8) N=24 の場合

$f_1(z)=\eta(2z)\eta(12z)$ の指標を $\chi_1(\sigma)$, $f_2(z)=\eta(4z)\eta(6z)$ の指標を $\chi_2(\sigma)$ とおく.

$$\begin{aligned}\chi_1(\sigma) &= \left(\frac{-24}{d}\right)\exp\left(\frac{14\pi i}{12}((a-2d-24bdc)c+bd)\right)\\ &= \left(\frac{-6}{d}\right)\exp\left(-\frac{5\pi i}{6}(ac+bd-2cd)\right)\\ \chi_2(\sigma) &= \left(\frac{-24}{d}\right)\exp\left(\frac{10\pi i}{12}((a-2d-24bdc)c+bd)\right)\\ &= \left(\frac{-6}{d}\right)\exp\left(\frac{5\pi i}{6}(ac+bd-2cd)\right)\end{aligned}$$

よって，N=24 の場合の指標 $\chi_1(\sigma),\chi_2(\sigma)$ は,

$$\begin{aligned}\chi_1\begin{pmatrix} a & b\\ 24c & d\end{pmatrix} &= \left(\frac{-6}{d}\right)\left(\exp(-\frac{5\pi i}{6}(ac+bd-2cd)\right)\\ \chi_2\begin{pmatrix} a & b\\ 24c & d\end{pmatrix} &= \left(\frac{-6}{d}\right)\left(\exp(\frac{5\pi i}{6}(ac+bd-2cd)\right)\end{aligned}$$

と定まる．なお，このとき，$\chi_1(\sigma)\chi_2(\sigma)=1$，すなわち，$\chi_1(\sigma)=\overline{\chi_2(\sigma)}$ が成立している．

(9) N=49 の場合

$f_1(z)=\eta(z)\eta(49z)$ の指標を $\chi_1(\sigma)$, $f_2(z)=\eta(7z)^2$ の指標を $\chi_2(\sigma)$ とおく.

(i) $c\equiv 1 \pmod 2$ のとき，

$$\begin{aligned}\chi_1(\sigma) &= \left(\frac{d}{49}\right)\exp\left(\frac{50\pi i}{12}((a+d-49bdc-3)c+bd)\right)\\ &= \exp\left(\frac{\pi i}{6}(ac+cd+bd-3c-bdc^2)\right)\\ \chi_2(\sigma) &= \left(\frac{d}{49}\right)\exp\left(\frac{14\pi i}{12}((a+d-49bdc-3)c+bd)\right)\\ &= \exp\left(-\frac{5\pi i}{6}(ac+cd+bd-3c-bdc^2)\right)\end{aligned}$$

(ii) $c\equiv 0 \pmod 2$ のとき，

$$\begin{aligned}\chi_1(\sigma) &= \left(\frac{-49}{d}\right)\exp\left(\frac{50\pi i}{12}((a-2d-49bdc)c+bd)\right)\\ &= \left(\frac{-1}{d}\right)\exp\left(\frac{\pi i}{6}(ac+bd-2cd-bdc^2)\right)\\ \chi_2(\sigma) &= \left(\frac{-49}{d}\right)\exp\left(\frac{14\pi i}{12}((a-2d-49bdc)c+bd)\right)\\ &= \left(\frac{-1}{d}\right)\exp\left(-\frac{5\pi i}{6}(ac+bd-2cd-bdc^2)\right)\end{aligned}$$

よって，N=49 の場合の指標 $\chi_1(\sigma), \chi_2(\sigma)$ は，

$$\chi_1\begin{pmatrix} a & b \\ 49c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{\pi i}{6}(ac+cd+bd-3c-bdc^2)\right) & , \quad (c : \mathrm{odd}) \\ \left(\dfrac{-1}{d}\right)\exp\left(\dfrac{\pi i}{6}(ac+bd-2cd-bdc^2)\right) & , \quad (c : \mathrm{even}) \end{cases}$$

$$\chi_2\begin{pmatrix} a & b \\ 49c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{5\pi i}{6}(ac+cd+bd-3c-bdc^2)\right) & , \quad (c : \mathrm{odd}) \\ \left(\dfrac{-1}{d}\right)\exp\left(-\dfrac{5\pi i}{6}(ac+bd-2cd-bdc^2)\right) & , \quad (c : \mathrm{even}) \end{cases}$$

と定まる．なお，このとき，$\chi_2(\sigma) = \overline{\chi_1(\sigma)^5}$ が成立している．

以上で，各 level N に対して，指標 χ がすべて決まった．

なお，2 つの指標 χ_1, χ_2 が表れた level では，いずれも，χ_2 は χ_1 を使って表現できていたことに注意しておく．したがって，ここで，各 Level N で定めた指標を χ_1 をあらためて χ とおいて，次ページの表にまとめておく．

表 1 は，各 Level N での指標 χ をまとめたものであり，表 2 は，表 1 でまとめた指標 χ を用いて，各 level N における η 関数の積で定まる指標をまとめたものである．

ここで，$\eta(mz)\eta(nz)$ に対し，$d = \gcd(m+n, 24)$, $d_0 = \dfrac{24}{d}$ とおく．

さて，これらの指標を見ると，いずれも，$\chi =$(平方剰余記号)$\times$(exp($*$)) の形をしていることがわかる．さらに，exp 部分はいずれも，d_0 乗すると 1 になっていることがわかる．特に，$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を exp 部分で変換すると，ζ_{d_0}(1 の d_0乗根) になっていることに注意しておく．

以上のことから，次の命題が成立する．

命題 3.3.1

$$\Gamma_0(N) \supset \ker\chi \supset \Gamma(d_0N)$$

が成立する．すなわち，$\ker\chi$ は，主合同群を含むので，合同部分群である．

証明

$\Gamma_0(N) \supset \ker\chi$ は，$\ker\chi$ の定義から明らかである．$\ker\chi \supset \Gamma(d_0N)$ については，$\sigma \in \Gamma(d_0N)$ をとると，

$$\sigma \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{d_0N}$$

となるので，各 Level N の指標 χ に代入して計算すれば，いずれも $\chi(\sigma) = 1$ となることが確認できる．したがって，$\ker\chi \supset \Gamma(d_0N)$ が成立する．

表 1: 各 level N における指標 χ

N	$\chi\begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix}$	χ の位数
11	$\left(\frac{-11}{d}\right)\mathrm{sgn}(\sigma)$	2
27	$\left(\frac{-3}{d}\right)\mathrm{sgn}(\sigma)$	2
20	$\left(\frac{-5}{d}\right)(-1)^{b+c}$	2
32	$\left(\frac{-2}{d}\right)(-1)^{b+c}$	2
36	$\left(\frac{-1}{d}\right)(-1)^{b+c}$	2
15	$\left(\frac{-15}{d}\right)\exp\left(-\frac{2\pi i}{3}(ac+cd+db)\right)$	6
17	$\left(\frac{d}{17}\right)\mathrm{sgn}'(\sigma)$	4
19	$(-1)^c\left(\frac{-19}{d}\right)\exp\left(-\frac{\pi i}{3}(ac+cd+db-bdc^2)\right)$	6
14	$\begin{cases} \left(\frac{14}{\lvert d\rvert}\right)\exp\left(-\frac{\pi i}{4}(3ac+bd+2c)\right) & ,\quad (c:\mathrm{odd}) \\ \left(\frac{-14}{d}\right)\exp\left(\frac{\pi i}{4}(ac+bd-2cd)\right) & ,\quad (c:\mathrm{even}) \end{cases}$	8
21	$\begin{cases} \left(\frac{d}{21}\right)\exp\left(-\frac{\pi i}{6}(ac+cd+4bd-3c)\right) & ,\quad (c:\mathrm{odd}) \\ \left(\frac{-21}{d}\right)\exp\left(-\frac{\pi i}{6}(ac+bd-2cd)\right) & ,\quad (c:\mathrm{even}) \end{cases}$	12
24	$\left(\frac{-6}{d}\right)\exp\left(-\frac{5\pi i}{6}(ac+bd-2cd)\right)$	12
49	$\begin{cases} \exp\left(\frac{\pi i}{6}(ac+cd+bd-3c-bdc^2)\right) & ,\quad (c:\mathrm{odd}) \\ \left(\frac{-1}{d}\right)\exp\left(\frac{\pi i}{6}(ac+bd-2cd-bdc^2)\right) & ,\quad (c:\mathrm{even}) \end{cases}$	12

表 2: η 関数の積で定まる指標 χ

N	$\eta(mz)\eta(nz)$	指標 χ	χ の位数	$d = \gcd(m+n, 24)$	$d_0 = \dfrac{24}{d}$
11	$\eta(z)\eta(11z)$	χ	2	12	2
27	$\eta(3z)\eta(9z)$	χ	2	12	2
20	$\eta(2z)\eta(10z)$	χ	2	12	2
32	$\eta(4z)\eta(8z)$	χ	2	12	2
36	$\eta(6z)^2$	χ	2	12	2
15	$\eta(z)\eta(15z)$	χ	6	8	3
	$\eta(3z)\eta(5z)$	χ^5	6	8	3
17	$\eta(z)\eta(17z)$	χ	4	6	4
19	$\eta(z)\eta(19z)$	χ	6	4	6
14	$\eta(z)\eta(14z)$	χ	8	3	8
	$\eta(2z)\eta(7z)$	χ^7	8	3	8
24	$\eta(2z)\eta(12z)$	χ	12	2	12
	$\eta(4z)\eta(6z)$	χ^{11}	12	2	12
21	$\eta(z)\eta(21z)$	χ	12	2	12
	$\eta(3z)\eta(7z)$	χ^7	12	2	12
49	$\eta(z)\eta(49z)$	χ	12	2	12
	$\eta(7z)^2$	χ^7	12	2	12

(注) 各 level N の χ は前ページの表 1 を参照のこと.

4　η 関数の積で定まる cusp form について

この章では η 関数を用いて構成した $\Gamma_0(N)$ に関する cusp form の具体例を紹介する．なお，次のように記号 $e(z)$ を定めておく．

$$e(z) = e^{2\pi iz}$$

まずはじめに次の補題を示しておく．

補題 4.0.2
任意の $GL^+(2,\mathbb{Q})$ の元は, $SL(2,\mathbb{Z})$ と上三角行列の積の形に表現できる．

証明
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL^+(2,\mathbb{Q})$ とする．$a = \dfrac{q}{p}, c = \dfrac{s}{r}$ とおき，$\alpha = gcd(ps, qr)$ とする．$qr = \alpha a', ps = \alpha c'$ とすれば，

$$a = \frac{q}{p} = qr\frac{1}{pr} = a'\frac{\alpha}{pr}$$
$$c = \frac{s}{r} = ps\frac{1}{pr} = c'\frac{\alpha}{pr}$$

となる．また，$(a', c') = 1$ であるので，このとき，$a'd' - b'c' = 1$ を満たす整数 b', d' が存在する．よって，この b', d' を用いて，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{pr} & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

と書くと，$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ であり，さらに，$x = bd' - b'd.\ y = a'd - bc'$ と定まる．よって，任意の $GL^+(2,\mathbb{Q})$ の元が, $SL(2,\mathbb{Z})$ と上三角行列の積の形に表現できることが示せた．　$\square$

このことから，$g \in GL^+(2,\mathbb{Q})$ で η 関数を変換するときは，$g = \gamma\sigma(\gamma = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}), \sigma$: 上三角行列) と変形して，

$$\eta(gz) = \eta(\gamma(\sigma(z))) = \varepsilon(a', b', c', d')\sqrt{c'\sigma(z) + d'}\ \eta(\sigma(z))$$

として変換すればよい．
　この補題と変換公式を使って，η 関数の積で構成した cusp form について検討していくことにする．

4.1　$S_2(\Gamma_0(N))$

　よく知られているように，N=11,14,15,20,24,27,32,36 については，次のように，η 関数を 4 つ掛け合わせることで (指標の付かない)$\Gamma_0(N)$ に関する weight 2 の cusp form ができる．

命題 4.1.1

$$\begin{array}{lcl}
\eta(z)^2\eta(11z)^2 & \in & S_2(\Gamma_0(11)) \\
\eta(z)\eta(2z)\eta(7z)\eta(14z) & \in & S_2(\Gamma_0(14)) \\
\eta(z)\eta(3z)\eta(5z)\eta(15z) & \in & S_2(\Gamma_0(15)) \\
\eta(2z)^2\eta(10z)^2 & \in & S_2(\Gamma_0(20)) \\
\eta(2z)\eta(4z)\eta(6z)\eta(12z) & \in & S_2(\Gamma_0(24)) \\
\eta(3z)^2\eta(9z)^2 & \in & S_2(\Gamma_0(27)) \\
\eta(4z)^2\eta(8z)^2 & \in & S_2(\Gamma_0(32)) \\
\eta(6z)^4 & \in & S_2(\Gamma_0(36))
\end{array}$$

証明

まず，η 関数は次のように定義された．

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n),\ (\text{ただし}, q = e(z))$$

$\eta(nz)$ は $q^{\frac{n}{24}}$ から始まるべき級数である．よって，命題中の η 関数の積はすべて q^1 から始まるべき級数であることがわかる．このときの $q = e(z)$ は cusp $i\infty$ での local parameter であるので，cusp $i\infty$ において，零点をもつことがわかる．したがって，$i\infty$ 以外の cusp について各場合に検証していくことにする．

まず，各 N の η 関数の積を $q = e(z)$ で展開したときのべき級数の式を

$$f_0(q) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$$

としておく．

1. $\eta(z)^2\eta(11z)^2 \in S_2(\Gamma_0(11))$ であること
   $f(z) = \eta(z)^2\eta(11z)^2$ とおく．

   (i) cusp 0 について
   $\varphi(0) = i\infty$ なる φ として，$\varphi(z) = -\dfrac{1}{z}$ をとる．$q = e\Big(\dfrac{z}{11}\Big)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}
f|[\varphi]_2(z) &= f(\varphi^{-1}(z))\frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz} \\
&= \eta\left(-\frac{1}{z}\right)^2\eta\left(-\frac{11}{z}\right)^2 \times \frac{1}{z^2} \\
&= (-iz)\left(-i\frac{z}{11}\right)\eta(z)^2\eta\left(\frac{z}{11}\right)^2 \times \frac{1}{z^2} \\
&= -\frac{1}{11}\eta(z)^2\eta\left(\frac{z}{11}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{11}\eta\left(\frac{z}{11}\right)^2\eta\left(11\frac{z}{11}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{11}f_0(q)
\end{aligned}$$

したがって，cusp 0 において零点をもつので，$\eta(z)^2\eta(11z)^2 \in S_2(\Gamma_0(11))$ であることが示せた．

2. $\eta(z)\eta(2z)\eta(7z)\eta(14z) \in S_2(\Gamma_0(14))$ であること

$f(z) = \eta(z)\eta(2z)\eta(7z)\eta(14z)$ とおく．

(i) cusp 0 について

$\varphi(0) = i\infty$ なる φ として，$\varphi(z) = -\dfrac{1}{z}$ をとる．$q = e\left(\dfrac{z}{14}\right)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}
f|[\varphi]_2(z) &= f(\varphi^{-1}(z))\frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz} \\
&= \eta\left(-\frac{1}{z}\right)\eta\left(-\frac{2}{z}\right)\eta\left(-\frac{7}{z}\right)\eta\left(-\frac{14}{z}\right) \times \frac{1}{z^2} \\
&= \sqrt{-iz}\sqrt{-i\frac{z}{2}}\sqrt{-i\frac{z}{7}}\sqrt{-i\frac{z}{14}}\eta(z)\eta\left(\frac{z}{2}\right)\eta\left(\frac{z}{7}\right)\eta\left(\frac{z}{14}\right) \times \frac{1}{z^2} \\
&= -\frac{1}{14}\eta(z)\eta\left(\frac{z}{2}\right)\eta\left(\frac{z}{7}\right)\eta\left(\frac{z}{14}\right) \\
&= -\frac{1}{14}\eta\left(\frac{z}{14}\right)\eta\left(2\frac{z}{14}\right)\eta\left(7\frac{z}{14}\right)\eta\left(14\frac{z}{14}\right) \\
&= -\frac{1}{14}f_0(q)
\end{aligned}$$

したがって，cusp 0 において零点をもつ．

(ii) cusp $\dfrac{1}{2}$ について

$\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) = i\infty$ なる φ として，$\varphi(z) = \dfrac{-z}{2z-1}$ をとる．$q = e\left(\dfrac{z}{7}\right)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}
f|[\varphi]_2(z) &= f(\varphi^{-1}(z))\frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz} \\
&= \eta\left(\frac{z}{2z+1}\right)\eta\left(\frac{2z}{2z+1}\right)\eta\left(\frac{7z}{2z+1}\right)\eta\left(\frac{14z}{2z+1}\right) \times \frac{1}{(2z+1)^2}
\end{aligned}$$

まず，

$$\begin{aligned}
\eta\left(\frac{z}{2z+1}\right) &= \eta\left(\frac{z}{2(z)+1}\right) = \varepsilon_1\sqrt{2z+1}\ \eta(z) \\
\eta\left(\frac{2z}{2z+1}\right) &= \eta\left(\frac{2z}{(2z)+1}\right) = \varepsilon_2\sqrt{2z+1}\ \eta(2z)
\end{aligned}$$

である．さらに，

$$\begin{aligned}
\eta\left(\frac{7z}{2z+1}\right) &= \eta\left(\frac{7z}{\frac{2}{7}(7z)+1}\right) \\
\eta\left(\frac{14z}{2z+1}\right) &= \eta\left(\frac{14z}{\frac{1}{7}(14z)+1}\right)
\end{aligned}$$

ここで補題 4.0.2 を用いて，

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{2}{7} & 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{7} & -3\\ 0 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\sigma \\
\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{7} & 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}7 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{7} & 1\\ 0 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\tau
\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}
\eta\left(\frac{7z}{2z+1}\right) &= \eta\left(\frac{7(\sigma(7z))+3}{2(\sigma(7z))+1}\right) = \varepsilon_3\sqrt{2(\sigma(7z))+1}\ \eta(\sigma(7z)) = \varepsilon_3\sqrt{\frac{2z+1}{7}}\ \eta\left(\frac{z-3}{7}\right) \\
\eta\left(\frac{14z}{2z+1}\right) &= \eta\left(\frac{7(\tau(14z))-1}{\tau(14z)}\right) = \varepsilon_4\sqrt{\tau(14z)}\ \eta(\tau(14z)) = \varepsilon_4\sqrt{\frac{2z+1}{7}}\ \eta\left(\frac{2z+1}{7}\right)
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
f|[\varphi]_2(z) &= \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}{7}\eta(z)\eta(2z)\eta\left(\frac{z-3}{7}\right)\eta\left(\frac{2z+1}{7}\right) \\
&= \frac{\varepsilon}{7}\eta(z-3)\eta(2(z-3))\eta\left(\frac{z-3}{7}\right)\eta\left(\frac{2(z-3)}{7}\right)e^{\frac{\pi i}{12}}e^{\frac{3\pi i}{12}}e^{\frac{6\pi i}{12}} \\
&= \frac{-1}{7}\eta\left(\frac{z-3}{7}\right)\eta\left(2\frac{z-3}{7}\right)\eta\left(7\frac{z-3}{7}\right)\eta\left(14\frac{z-3}{7}\right) \\
&= -\frac{1}{7}f_0(qe^{\frac{-6\pi i}{7}})
\end{aligned}$$

ただし，$\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = e^{\frac{2\pi i}{12}}$ である．

これで，cusp $\dfrac{1}{2}$ において零点を持つことがわかった．

(iii) cusp $\dfrac{1}{7}$ について

$\varphi\left(\dfrac{1}{7}\right) = i\infty$ なる φ として，$\varphi(z) = \dfrac{-z}{7z-1}$ をとる．$q = e\left(\dfrac{z}{2}\right)$ とおく．

$$\begin{aligned}
f|[\varphi]_2(z) &= f(\varphi^{-1}(z))\frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz} \\
&= \eta\left(\frac{z}{7z+1}\right)\eta\left(\frac{2z}{7z+1}\right)\eta\left(\frac{7z}{7z+1}\right)\eta\left(\frac{14z}{7z+1}\right)\times\frac{1}{(7z+1)^2}
\end{aligned}$$

まず，

$$\begin{aligned}
\eta\left(\frac{z}{7z+1}\right) &= \eta\left(\frac{z}{7(z)+1}\right) = \varepsilon_1\sqrt{7z+1}\ \eta(z) \\
\eta\left(\frac{7z}{7z+1}\right) &= \eta\left(\frac{7z}{(7z)+1}\right) = \varepsilon_2\sqrt{7z+1}\ \eta(7z)
\end{aligned}$$

である．さらに，

$$\begin{aligned}
\eta\left(\frac{2z}{7z+1}\right) &= \eta\left(\frac{2z}{\frac{7}{2}(2z)+1}\right) \\
\eta\left(\frac{14z}{7z+1}\right) &= \eta\left(\frac{14z}{\frac{1}{2}(14z)+1}\right)
\end{aligned}$$

ここで補題 4.0.2 を用いて，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{7}{2} & 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}2 & 1\\ 7 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 7 & 4\end{pmatrix}\sigma\\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\tau\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}\eta\left(\frac{2z}{7z+1}\right) &= \eta\left(\frac{2(\sigma(2z))+1}{7(\sigma(2z))+4}\right) = \varepsilon_3\sqrt{7(\sigma(2z))+4}\ \eta(\sigma(7z)) = \varepsilon_3\sqrt{\frac{7z+1}{2}}\ \eta\left(\frac{z-1}{2}\right)\\ \eta\left(\frac{14z}{7z+1}\right) &= \eta\left(\frac{2(\tau(14z))-1}{\tau(14z)}\right) = \varepsilon_4\sqrt{\tau(14z)}\ \eta(\tau(14z)) = \varepsilon_4\sqrt{\frac{7z+1}{2}}\ \eta\left(\frac{7z+1}{2}\right)\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}f|[\varphi]_2(z) &= \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}{2}\eta(z)\eta(7z)\eta\left(\frac{z-1}{2}\right)\eta\left(\frac{7z-1}{2}\right)\\ &= \frac{\varepsilon}{2}\eta(z-1)\eta(7(z-1))\eta\left(\frac{z-1}{7}\right)\eta\left(\frac{7(z-1)}{2}\right)e^{\frac{\pi i}{12}}e^{\frac{4\pi i}{12}}e^{\frac{7\pi i}{12}}\\ &= \frac{1}{2}\eta\left(\frac{z-1}{2}\right)\eta\left(2\frac{z-1}{2}\right)\eta\left(7\frac{z-1}{2}\right)\eta\left(14\frac{z-1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}f_0(-q)\end{aligned}$$

ただし，$\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = e^{\frac{-12\pi i}{12}}$ である．

これで，cusp $\dfrac{1}{7}$ においても零点を持つことがわかった．

以上で，すべての cusp で零点になっていることが判明したので，$\eta(z)\eta(2z)\eta(7z)\eta(14z) \in S_2(\Gamma_0(14))$ であることが証明された． □

ほかの各場合についても N=11,14 の場合に同じであるので詳しい証明は省略する．

以下に，表にして結果をまとめておく．

- $\eta(z)^2\eta(11z)^2 \in S_2(\Gamma_0(11))$

cusp	q	$\varphi(z)$	$f\|[\varphi]_2$ の q 展開
$i\infty$	$e(z)$	id	$f_0(q)$
0	$e\left(\frac{z}{11}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{1}{11}f_0(q)$

- $\eta(z)\eta(2z)\eta(7z)\eta(14z) \in S_2(\Gamma_0(14))$

cusp	q	$\varphi(z)$	$f\|[\varphi]_2$ の q 展開
$i\infty$	$e(z)$	id	$f_0(q)$
0	$e\left(\frac{z}{14}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{1}{14}f_0(q)$
$\frac{1}{2}$	$e\left(\frac{z}{7}\right)$	$\frac{-z}{2z-1}$	$-\frac{1}{7}f_0(qe^{\frac{-6\pi i}{7}})$
$\frac{1}{7}$	$e\left(\frac{z}{2}\right)$	$\frac{-z}{7z-1}$	$\frac{1}{2}f_0(-q)$

- $\eta(z)\eta(3z)\eta(5z)\eta(15z) \in S_2(\Gamma_0(15))$

cusp	q	$\varphi(z)$	$f\|[\varphi]_2$ の q 展開
$i\infty$	$e(z)$	id	$f_0(q)$
0	$e\left(\frac{z}{15}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{1}{15}f_0(q)$
$\frac{1}{3}$	$e\left(\frac{z}{5}\right)$	$\frac{-z}{3z-1}$	$-\frac{1}{5}f_0(qe^{\frac{-6\pi i}{5}})$
$\frac{1}{5}$	$e\left(\frac{z}{3}\right)$	$\frac{-z}{5z-1}$	$\frac{1}{3}f_0(qe^{\frac{-2\pi i}{3}})$

- $\eta(2z)^2\eta(10z)^2 \in S_2(\Gamma_0(20))$

cusp	q	$\varphi(z)$	$f\|[\varphi]_2$ の q 展開
$i\infty$	$e(z)$	id	$f_0(q)$
0	$e\left(\frac{z}{20}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{1}{20}f_0(q)$
$\frac{1}{2}$	$e\left(\frac{z}{5}\right)$	$\frac{-z}{2z-1}$	$\frac{1}{5}f_0(qe^{\frac{\pi i}{5}})$
$\frac{1}{4}$	$e\left(\frac{z}{5}\right)$	$\frac{-z}{4z-1}$	$\frac{1}{5}f_0(qe^{\frac{-2\pi i}{5}})$
$\frac{1}{5}$	$e\left(\frac{z}{4}\right)$	$\frac{-z}{5z-1}$	$\frac{1}{4}f_0(qe^{\frac{-\pi i}{2}})$
$\frac{1}{10}$	$e(z)$	$\frac{-z}{10z-1}$	$-f_0(q)$

- $\eta(2z)\eta(4z)\eta(6z)\eta(12z) \in S_2(\Gamma_0(24))$

cusp	q	$\varphi(z)$	$f\|[\varphi]_2$ の q 展開
$i\infty$	$e(z)$	id	$f_0(q)$
0	$e\left(\frac{z}{24}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{1}{24}f_0(q)$
$\frac{1}{2}$	$e\left(\frac{z}{6}\right)$	$\frac{-z}{2z-1}$	$\frac{1}{6}f_0(qe^{\frac{\pi i}{6}})$
$\frac{1}{3}$	$e\left(\frac{z}{8}\right)$	$\frac{-z}{3z-1}$	$\frac{1}{8}f_0(qe^{\frac{-\pi i}{4}})$
$\frac{1}{4}$	$e\left(\frac{z}{3}\right)$	$\frac{-z}{4z-1}$	$\frac{1}{3}f_0(qe^{\frac{-\pi i}{3}})$
$\frac{1}{6}$	$e\left(\frac{z}{2}\right)$	$\frac{-z}{6z-1}$	$\frac{1}{2}f_0(qe^{\frac{-\pi i}{2}})$
$\frac{1}{8}$	$e\left(\frac{z}{3}\right)$	$\frac{-z}{8z-1}$	$\frac{1}{3}f_0(qe^{\frac{-2\pi i}{3}})$
$\frac{1}{12}$	$e(z)$	$\frac{-z}{12z-1}$	$-f_0(q)$

- $\eta(3z)^2\eta(9z)^2 \in S_2(\Gamma_0(27))$

cusp	q	$\varphi(z)$	$f\|[\varphi]_2$ の q 展開
$i\infty$	$e(z)$	id	$f_0(q)$
0	$e\left(\frac{z}{27}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{1}{27}f_0(q)$
$\frac{1}{3}$	$e\left(\frac{z}{3}\right)$	$\frac{-z}{3z-1}$	$\frac{1}{3}e^{\frac{-\pi i}{3}}f_0(qe^{\frac{2\pi i}{9}})$
$\frac{2}{3}$	$e\left(\frac{z}{3}\right)$	$\frac{-2z+1}{3z-2}$	$\frac{1}{3}e^{\frac{\pi i}{3}}f_0(qe^{\frac{4\pi i}{9}})$
$\frac{1}{9}$	$e(z)$	$\frac{-z}{9z-1}$	$e^{\frac{-2\pi i}{3}}f_0(q)$
$\frac{2}{9}$	$e(z)$	$\frac{-5z+1}{9z-2}$	$e^{\frac{2\pi i}{3}}f_0(q)$

- $\eta(4z)^2\eta(8z)^2 \in S_2(\Gamma_0(32))$

cusp	q	$\varphi(z)$	$f\|[\varphi]_2$ の q 展開
$i\infty$	$e(z)$	id	$f_0(q)$
0	$e\left(\frac{z}{32}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{1}{32}f_0(q)$
$\frac{1}{2}$	$e\left(\frac{z}{8}\right)$	$\frac{-z}{2z-1}$	$\frac{1}{8}f_0(qe^{\frac{\pi i}{8}})$
$\frac{1}{4}$	$e\left(\frac{z}{2}\right)$	$\frac{-z}{4z-1}$	$\frac{1}{2}e^{\frac{-\pi i}{2}}f_0(qe^{\frac{\pi i}{4}})$
$\frac{3}{4}$	$e\left(\frac{z}{2}\right)$	$\frac{-3z+2}{4z-3}$	$\frac{1}{2}e^{\frac{\pi i}{2}}f_0(qe^{\frac{3\pi i}{4}})$
$\frac{1}{8}$	$e(z)$	$\frac{-z}{8z-1}$	$e^{\frac{-\pi i}{2}}f_0(q)$
$\frac{3}{8}$	$e(z)$	$\frac{-3z+1}{8z-3}$	$e^{\frac{\pi i}{2}}f_0(q)$
$\frac{1}{16}$	$e(z)$	$\frac{-z}{16z-1}$	$-f_0(q)$

- $\eta(6z)^4 \in S_2(\Gamma_0(36))$

cusp	q	$\varphi(z)$	$f\|[\varphi]_2$ の q 展開
$i\infty$	$e(z)$	id	$f_0(q)$
0	$e\left(\frac{z}{36}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{1}{36}f_0(q)$
$\frac{1}{2}$	$e\left(\frac{z}{9}\right)$	$\frac{-z}{2z-1}$	$\frac{1}{9}f_0(qe^{\frac{\pi i}{9}})$
$\frac{1}{3}$	$e\left(\frac{z}{4}\right)$	$\frac{-z}{3z-1}$	$\frac{1}{4}e^{\frac{-\pi i}{3}}f_0(qe^{\frac{\pi i}{6}})$
$\frac{2}{3}$	$e\left(\frac{z}{4}\right)$	$\frac{-2z+1}{3z-2}$	$\frac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{3}}f_0(qe^{\frac{\pi i}{3}})$
$\frac{1}{4}$	$e\left(\frac{z}{9}\right)$	$\frac{-z}{4z-1}$	$\frac{1}{9}e^{\frac{-\pi i}{3}}f_0(qe^{\frac{-\pi i}{9}})$
$\frac{1}{6}$	$e(z)$	$\frac{-z}{6z-1}$	$e^{\frac{-\pi i}{3}}f_0(q)$
$\frac{5}{6}$	$e(z)$	$\frac{-5z+4}{6z-5}$	$e^{\frac{\pi i}{3}}f_0(q)$
$\frac{1}{9}$	$e\left(\frac{z}{4}\right)$	$\frac{-z}{9z-1}$	$\frac{1}{4}e^{\frac{-\pi i}{3}}f_0(qe^{\frac{-\pi i}{6}})$
$\frac{1}{12}$	$e(z)$	$\frac{-z}{12z-1}$	$e^{\frac{-2\pi i}{3}}f_0(q)$
$\frac{5}{12}$	$e(z)$	$\frac{-5z+2}{12z-5}$	$e^{\frac{2\pi i}{3}}f_0(q)$
$\frac{1}{18}$	$e(z)$	$\frac{-z}{18z-1}$	$-f_0(q)$

4.2 $S_1(\Gamma_0(N), \chi)$

先ほどは weight2 の cuspform について考えたが，ここでは，指標付きの weight1 の cusp form について検証する．以下，χ という記号を複数の N に対して同時に用いているが，これらはすべて前章の表 1, 表 2 で定めた指標 χ のことであり，当然，N によって異なっているものであることを最初に断わっておく．

まず，weight 2 のところで取り扱った，$N = 11, 20, 27, 32, 36$ の各場合について, 次の命題が成立する．

命題 4.2.1

$$
\begin{array}{lcl}
\eta(z)\eta(11z) & \in & S_1(\Gamma_0(11), \chi) \\
\eta(2z)\eta(10z) & \in & S_1(\Gamma_0(20), \chi) \\
\eta(3z)\eta(9z) & \in & S_1(\Gamma_0(27), \chi) \\
\eta(4z)\eta(8z) & \in & S_1(\Gamma_0(32), \chi) \\
\eta(6z)^2 & \in & S_1(\Gamma_0(36), \chi)
\end{array}
$$

証明
N=11 の場合を証明する．$f = \eta(z)\eta(11z)$ とおく．f の $\Gamma_0(11)$ に関する指標 χ は位数 2 の real charactor であり，$\chi^2 = 1$ が成立する．いま，f が cusp form でないと仮定すると，f^2 も cusp form ではない (ベキ級数展開したときの初項に着目すれば明らか)．これは，$f^2 \in S_2(\Gamma_0(11))$ に矛盾する．したがって，$f \in S_1(\Gamma_0(11), \chi)$ が成立する．他の N についても同様である． □

次に，N=14,15,24 については，次のように 2 つの η 関数の積に分解することで (指標つきの)weight 1 の cusp form が得られる．

命題 4.2.2

$$
\begin{cases}
\eta(z)\eta(14z) \in S_1(\Gamma_0(14), \chi) \\
\eta(2z)\eta(7z) \in S_1(\Gamma_0(14), \chi^7)
\end{cases}
\begin{cases}
\eta(z)\eta(15z) \in S_1(\Gamma_0(15), \chi) \\
\eta(3z)\eta(5z) \in S_1(\Gamma_0(15), \chi^5)
\end{cases}
\begin{cases}
\eta(2z)\eta(12z) \in S_1(\Gamma_0(24), \chi) \\
\eta(4z)\eta(6z) \in S_1(\Gamma_0(24), \chi^{11})
\end{cases}
$$

証明
$\eta(z)\eta(2z)\eta(7z)\eta(14z) \in S_2(\Gamma_0(14))$ を証明した方法と全く同様にして，各 cusp での q 展開の様子を調べればよい． □

前命題の場合も含めて，cusp での q 展開の初項のみを表にまとめておく．

なお，$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，

$$
\left(\frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz} \right)^{1/2} = \frac{1}{cz+d}
$$

と定義する．

- $f(z)=\eta(z)\eta(11z)\in S_1(\Gamma_0(11),\chi)$

cusp	q	$\varphi(z)$	$f\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項
$i\infty$	$e(z)$	id	$q^{\frac{1}{2}}$
0	$e\left(\frac{z}{11}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{i}{\sqrt{11}}q^{\frac{1}{2}}$

- $f(z)=\eta(2z)\eta(10z)\in S_1(\Gamma_0(20),\chi)$

cusp	q	$\varphi(z)$	$f\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項
$i\infty$	$e(z)$	id	$q^{\frac{1}{2}}$
0	$e\left(\frac{z}{20}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{i}{\sqrt{20}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{2}$	$e\left(\frac{z}{5}\right)$	$\frac{-z}{2z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}e^{\frac{\pi i}{10}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{4}$	$e\left(\frac{z}{5}\right)$	$\frac{-z}{4z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}e^{-\frac{\pi i}{5}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{5}$	$e\left(\frac{z}{4}\right)$	$\frac{-z}{5z-1}$	$-\frac{1}{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{10}$	$e(z)$	$\frac{-z}{10z-1}$	$e^{-\frac{\pi i}{2}}q^{\frac{1}{2}}$

- $f(z)=\eta(3z)\eta(9z)\in S_1(\Gamma_0(27),\chi)$

cusp	q	$\varphi(z)$	$f\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項
$i\infty$	$e(z)$	id	$q^{\frac{1}{2}}$
0	$e\left(\frac{z}{27}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{i}{\sqrt{27}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{3}$	$e\left(\frac{z}{3}\right)$	$\frac{-z}{3z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\pi i}{18}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{2}{3}$	$e\left(\frac{z}{3}\right)$	$\frac{-2z+1}{3z-2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{7\pi i}{18}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{9}$	$e(z)$	$\frac{-z}{9z-1}$	$e^{-\frac{\pi i}{3}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{2}{9}$	$e(z)$	$\frac{-5z+1}{9z-2}$	$e^{\frac{\pi i}{3}}q^{\frac{1}{2}}$

- $f(z) = \eta(4z)\eta(8z) \in S_1(\Gamma_0(32), \chi)$

cusp	q	$\varphi(z)$	$f\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項
$i\infty$	$e(z)$	id	$q^{\frac{1}{2}}$
0	$e\left(\frac{z}{32}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{i}{4\sqrt{2}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{2}$	$e\left(\frac{z}{8}\right)$	$\frac{-z}{2z-1}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{\frac{\pi i}{16}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{4}$	$e\left(\frac{z}{2}\right)$	$\frac{-z}{4z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi i}{8}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{3}{4}$	$e\left(\frac{z}{2}\right)$	$\frac{-3z+2}{4z-3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi i}{8}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{8}$	$e(z)$	$\frac{-z}{8z-1}$	$e^{-\frac{\pi i}{4}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{3}{8}$	$e(z)$	$\frac{-3z+1}{8z-3}$	$-e^{-\frac{5\pi i}{4}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{16}$	$e(z)$	$\frac{-z}{16z-1}$	$e^{-\frac{\pi i}{2}}q^{\frac{1}{2}}$

- $f(z) = \eta(6z)^2 \in S_1(\Gamma_0(36), \chi)$

cusp	q	$\varphi(z)$	$f\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項
$i\infty$	$e(z)$	id	$q^{\frac{1}{2}}$
0	$e\left(\frac{z}{36}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{i}{6}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{2}$	$e\left(\frac{z}{9}\right)$	$\frac{-z}{2z-1}$	$\frac{1}{3}e^{\frac{\pi i}{18}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{3}$	$e\left(\frac{z}{4}\right)$	$\frac{-z}{3z-1}$	$\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi i}{12}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{2}{3}$	$e\left(\frac{z}{4}\right)$	$\frac{-2z+1}{3z-2}$	$\frac{1}{2}e^{\frac{\pi i}{3}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{4}$	$e\left(\frac{z}{2}\right)$	$\frac{-z}{4z-1}$	$\frac{1}{3}e^{-\frac{2\pi i}{9}}q^{\frac{1}{9}}$
$\frac{1}{6}$	$e(z)$	$\frac{-z}{6z-1}$	$e^{-\frac{\pi i}{6}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{5}{6}$	$e(z)$	$\frac{-5z+4}{6z-5}$	$e^{\frac{7\pi i}{6}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{9}$	$e\left(\frac{z}{4}\right)$	$\frac{-z}{9z-1}$	$\frac{1}{2}e^{\frac{7\pi i}{4}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{12}$	$e(z)$	$\frac{-z}{12z-1}$	$e^{-\frac{\pi i}{3}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{5}{12}$	$e(z)$	$\frac{-5z+2}{12z-5}$	$e^{\frac{\pi i}{3}}q^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{18}$	$e(z)$	$\frac{-z}{18z-1}$	$e^{-\frac{\pi i}{2}}q^{\frac{1}{2}}$

- $f_1(z) = \eta(z)\eta(14z) \in S_1(\Gamma_0(14), \chi)$, $f_2(z) = \eta(2z)\eta(7z) \in S_1(\Gamma_0(14), \chi^7)$

cusp	q	$\varphi(z)$	$f_1\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項	$f_2\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項
$i\infty$	$e(z)$	id	$q^{\frac{5}{8}}$	$q^{\frac{3}{8}}$
0	$e\left(\frac{z}{14}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{i}{\sqrt{14}}q^{\frac{5}{8}}$	$-\frac{i}{\sqrt{14}}q^{\frac{3}{8}}$
$\frac{1}{2}$	$e\left(\frac{z}{7}\right)$	$\frac{-z}{2z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{7}}e^{\frac{5\pi i}{28}}q^{\frac{3}{8}}$	$\frac{1}{\sqrt{7}}e^{-\frac{\pi i}{28}}q^{\frac{5}{8}}$
$\frac{1}{7}$	$e\left(\frac{z}{2}\right)$	$\frac{-z}{7z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{11\pi i}{8}}q^{\frac{3}{8}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{13\pi i}{8}}q^{\frac{5}{8}}$

- $f_1(z) = \eta(z)\eta(15z) \in S_1(\Gamma_0(15), \chi)$, $f_2(z) = \eta(3z)\eta(5z) \in S_1(\Gamma_0(15), \chi^5)$

cusp	q	$\varphi(z)$	$f_1\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項	$f_2\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項
$i\infty$	$e(z)$	id	$q^{\frac{2}{3}}$	$q^{\frac{1}{3}}$
0	$e\left(\frac{z}{15}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{i}{\sqrt{15}}q^{\frac{2}{3}}$	$-\frac{i}{\sqrt{15}}q^{\frac{1}{3}}$
$\frac{1}{3}$	$e\left(\frac{z}{5}\right)$	$\frac{-z}{3z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}e^{-\frac{\pi i}{15}}q^{\frac{1}{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}e^{\frac{13\pi i}{15}}q^{\frac{2}{3}}$
$\frac{1}{5}$	$e\left(\frac{z}{3}\right)$	$\frac{-z}{5z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{29\pi i}{18}}q^{\frac{1}{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{13\pi i}{18}}q^{\frac{2}{3}}$

- $f_1(z) = \eta(2z)\eta(12z) \in S_1(\Gamma_0(24), \chi)$, $f_2(z) = \eta(4z)\eta(6z) \in S_1(\Gamma_0(24), \chi^{11})$

cusp	q	$\varphi(z)$	$f_1\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項	$f_2\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項
$i\infty$	$e(z)$	id	$q^{\frac{7}{12}}$	$q^{\frac{5}{12}}$
0	$e\left(\frac{z}{24}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{i}{\sqrt{24}}q^{\frac{7}{12}}$	$-\frac{i}{\sqrt{24}}q^{\frac{5}{12}}$
$\frac{1}{2}$	$e\left(\frac{z}{6}\right)$	$\frac{-z}{2z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}e^{\frac{13\pi i}{72}}q^{\frac{7}{12}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}e^{-\frac{\pi i}{72}}q^{\frac{5}{12}}$
$\frac{1}{3}$	$e\left(\frac{z}{8}\right)$	$\frac{-z}{3z-1}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi i}{48}}q^{\frac{5}{12}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{11\pi i}{48}}q^{\frac{7}{12}}$
$\frac{1}{4}$	$e\left(\frac{z}{3}\right)$	$\frac{-z}{4z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{5\pi i}{36}}q^{\frac{5}{12}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{7\pi i}{36}}q^{\frac{7}{12}}$
$\frac{1}{6}$	$e\left(\frac{z}{2}\right)$	$\frac{-z}{6z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{7\pi i}{24}}q^{\frac{5}{12}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{19\pi i}{24}}q^{\frac{7}{12}}$
$\frac{1}{8}$	$e\left(\frac{z}{3}\right)$	$\frac{-z}{8z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{14\pi i}{9}}q^{\frac{5}{12}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{16\pi i}{9}}q^{\frac{7}{12}}$
$\frac{1}{12}$	$e(z)$	$\frac{-z}{12z-1}$	$e^{\frac{17\pi i}{12}}q^{\frac{7}{12}}$	$e^{\frac{19\pi i}{12}}q^{\frac{5}{12}}$

次にあげる η 関数の積については weight 2 では登場しなかったものであるので，詳しく見ていくことにする．

まず，N=17,19 の場合について，次の命題が成立する．

命題 4.2.3

$$\begin{aligned}\eta(z)\eta(17z) &\in S_1(\Gamma_0(17),\chi)\\ \eta(z)\eta(19z) &\in S_1(\Gamma_0(19),\chi)\end{aligned}$$

証明
$\Gamma_0(17),\Gamma_0(19)$ の cusp はいずれも，0 と $i\infty$ であるので，ここでは N=17 の場合だけ証明しておく．N=19 の場合も全く同様である．

$f(z)=\eta(z)\eta(17z)$ とおく．このとき $f(z)$ は，$q=e(z)$ でべき級数展開すると，$q^{\frac{3}{4}}$ から始まるので，cusp $i\infty$ で零点を持つことがわかる．このべき級数を $f_0(q)$ とおく．もうひとつの cusp 0 について調べる．$\varphi(0)=i\infty$ なる φ として，$\varphi(z)=-\dfrac{1}{z}$ をとる．$q=e\Big(\dfrac{z}{17}\Big)$ とおく．このとき次のように q 展開ができる．

$$\begin{aligned}f|[\varphi]_1(z) &= f(\varphi^{-1}(z))\left(\frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz}\right)^{1/2}\\ &= \eta\left(-\frac{1}{z}\right)\eta\left(-\frac{17}{z}\right)\times\frac{1}{z}\\ &= \sqrt{-iz}\sqrt{-i\frac{z}{11}}\eta(z)\eta\left(\frac{z}{17}\right)\times\frac{1}{z}\\ &= -\frac{i}{\sqrt{17}}\eta(z)\eta\left(\frac{z}{17}\right)\\ &= -\frac{i}{\sqrt{17}}\eta\left(\frac{z}{17}\right)\eta\left(17\frac{z}{17}\right)\\ &= -\frac{i}{\sqrt{17}}f_0(q)\end{aligned}$$

したがって，cusp 0 においても零点をもつので，$\eta(z)\eta(17z)\in S_1(\Gamma_0(17),\chi)$ であることが示せた．
□

次に，N=21 の場合には次の命題が成立する．

命題 4.2.4

$$\begin{aligned}\eta(z)\eta(21z) &\in S_1(\Gamma_0(21),\chi)\\ \eta(3z)\eta(7z) &\in S_1(\Gamma_0(21),\chi^7)\end{aligned}$$

証明
$f_1=\eta(z)\eta(21z),f_2=\eta(3z)\eta(7z),$ とおく．このとき f_1,f_2 は，$q=e(z)$ でべき級数展開すると，それぞれ，$q^{\frac{11}{12}},q^{\frac{5}{12}}$ から始まるので，cusp $i\infty$ で零点を持つことがわかる．このべき級数をそれぞれ $F_1(q),F_2(q)$ とおく．それでは，残りの cusp について，具体的に考察していく．

1. cusp 0 について

$\varphi(0) = i\infty$ なる φ として，$\varphi(z) = -\dfrac{1}{z}$ をとる．$q = e\left(\dfrac{z}{21}\right)$ とおけ．このとき，次のように q 展開ができる．

$$\begin{aligned} f_1|[\varphi]_1(z) &= f_1(\varphi^{-1}(z))\left(\frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz}\right)^{1/2} \\ &= \eta\left(-\frac{1}{z}\right)\eta\left(-\frac{21}{z}\right)\times\frac{1}{z} \\ &= \sqrt{-iz}\sqrt{-i\frac{z}{21}}\eta(z)\eta\left(\frac{z}{21}\right)\times\frac{1}{z} \\ &= -\frac{i}{\sqrt{21}}\eta(z)\eta\left(\frac{z}{21}\right) \\ &= -\frac{i}{\sqrt{21}}\eta\left(\frac{z}{21}\right)\eta\left(21\frac{z}{21}\right) \\ &= -\frac{i}{\sqrt{21}}F_1(q) \end{aligned}$$

f_2 についても同様にして，

$$f_2|[\varphi]_1(z) = -\frac{i}{\sqrt{21}}F_2(q)$$

したがって，cusp 0 においても零点をもつ．

2. cusp $\dfrac{1}{3}$ について

$\varphi\left(\dfrac{1}{3}\right) = i\infty$ なる φ として，$\varphi(z) = \dfrac{-z}{3z-1}$ をとる．$q = e\left(\dfrac{z}{7}\right)$ とおく．

$$f_1|[\varphi]_1(z) = f_1(\varphi^{-1}(z))\left(\frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz}\right)^{1/2} = \eta\left(\frac{z}{3z+1}\right)\eta\left(\frac{21z}{3z+1}\right)\times\frac{1}{(3z+1)}$$
$$f_2|[\varphi]_1(z) = f_2(\varphi^{-1}(z))\left(\frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz}\right)^{1/2} = \eta\left(\frac{3z}{3z+1}\right)\eta\left(\frac{7z}{3z+1}\right)\times\frac{1}{(3z+1)}$$

まず，

$$\begin{aligned} \eta\left(\frac{z}{3z+1}\right) &= \eta\left(\frac{z}{3(z)+1}\right) = \varepsilon_1\sqrt{3z+1}\eta(z) \\ \eta\left(\frac{3z}{3z+1}\right) &= \eta\left(\frac{3z}{(3z)+1}\right) = \varepsilon_3\sqrt{3z+1}\ \eta(z) \end{aligned}$$

である．さらに，

$$\begin{aligned} \eta\left(\frac{21z}{3z+1}\right) &= \eta\left(\frac{21z}{\frac{1}{7}(21z)+1}\right) \\ \eta\left(\frac{7z}{3z+1}\right) &= \eta\left(\frac{7z}{\frac{3}{7}(7z)+1}\right) \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{pmatrix}1&0\\\frac{1}{7}&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{7}&1\\0&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-1\\1&0\end{pmatrix}\sigma$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\\frac{3}{7}&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7&2\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{7}&-2\\0&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&2\\3&1\end{pmatrix}\tau$$

だから，

$$\eta\left(\frac{21z}{3z+1}\right) = \eta\left(\frac{7(\sigma(21z))-1}{\sigma(21z)}\right)=\varepsilon_2\sqrt{\sigma(21z)}\ \eta(\sigma(21z))=\varepsilon_2\sqrt{\frac{3z+1}{7}}\ \eta\left(\frac{3z+1}{7}\right)$$

$$\eta\left(\frac{7z}{3z+1}\right) = \eta\left(\frac{7(\tau(7z))+2}{3(\tau(7z))+1}\right)=\varepsilon_4\sqrt{3(\tau(7z))+2}\ \eta(\tau(7z))=\varepsilon_4\sqrt{\frac{3z+1}{7}}\ \eta\left(\frac{z-1}{7}\right)$$

したがって，

$$\begin{aligned} f_1|[\varphi]_1(z) &= \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\sqrt{7}}\eta(z)\eta\left(\frac{3z+1}{7}\right) \\ &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{7}}\eta\left(3\frac{z-2}{7}\right)\eta\left(7\frac{z-2}{7}\right)e^{\frac{\pi i}{12}}e^{\frac{2\pi i}{12}} \\ &= \frac{e^{\frac{4\pi i}{12}}}{\sqrt{7}}F_2(qe^{\frac{-4\pi i}{7}}) \end{aligned}$$

f_2 についても同様にして，

$$f_2|[\varphi]_1(z) = \frac{e^{\frac{4\pi i}{12}}}{\sqrt{7}}F_1(qe^{\frac{-4\pi i}{7}})$$

これで，cusp $\dfrac{1}{3}$ において零点を持つことがわかった．

3. cusp $\dfrac{1}{7}$ について

$\varphi\left(\dfrac{1}{7}\right)=i\infty$ なる φ として，$\varphi(z)=\dfrac{-z}{7z-1}$ をとる．$q=e\left(\dfrac{z}{3}\right)$ とする．以下，cusp $\dfrac{1}{7}$ の場合に同じであるので，ベキ級数展開の結果だけを記す．

$$\begin{aligned} f_1|[\varphi]_1(z) &= f_1(\varphi^{-1}(z))\left(\frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz}\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}F_2(qe^{\frac{-4\pi i}{3}}) \\ f_2|[\varphi]_1(z) &= f_2(\varphi^{-1}(z))\left(\frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz}\right)^{1/2}=-\frac{e^{\frac{-6\pi i}{12}}}{\sqrt{3}}F_1(qe^{\frac{-4\pi i}{3}}) \end{aligned}$$

これで，cusp $\dfrac{1}{7}$ において零点を持つことがわかった．

以上で，$\eta(z)\eta(21z)\in S_1(\Gamma_0(21),\chi)$，$\eta(3z)\eta(7z)\in S_1(\Gamma_0(21),\chi^7)$ であることが証明された． □

最後に，N=49 の場合には次の命題が成立する．

命題 4.2.5

$$\begin{array}{lcl} \eta(z)\eta(49z) & \in & S_1(\Gamma_0(49),\chi) \\ \eta(7z)^2 & \in & S_1(\Gamma_0(49),\chi^7) \end{array}$$

証明

これまでと同様に，各 cusp で q 展開し，初項が正のベキから始まっていることを確認すれば良い．
□

N=17,19,21,49 の場合について以下にまとめておく．

- $f(z)=\eta(z)\eta(17z)\in S_1(\Gamma_0(17),\chi)$

cusp	q	$\varphi(z)$	$f\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項
$i\infty$	$e(z)$	id	$q^{\frac{3}{4}}$
0	$e\left(\frac{z}{17}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{i}{\sqrt{17}}q^{\frac{3}{4}}$

- $f(z)=\eta(z)\eta(19z)\in S_1(\Gamma_0(19),\chi)$

cusp	q	$\varphi(z)$	$f\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項
$i\infty$	$e(z)$	id	$q^{\frac{5}{6}}$
0	$e\left(\frac{z}{19}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{i}{\sqrt{19}}q^{\frac{5}{6}}$

- $f_1(z)=\eta(z)\eta(21z)\in S_1(\Gamma_0(21),\chi)$, $f_2(z)=\eta(3z)\eta(7z)\in S_1(\Gamma_0(21),\chi^7)$

cusp	q	$\varphi(z)$	$f_1\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項	$f_2\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項
$i\infty$	$e(z)$	id	$q^{\frac{11}{12}}$	$q^{\frac{5}{12}}$
0	$e\left(\frac{z}{21}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{i}{\sqrt{21}}q^{\frac{11}{12}}$	$-\frac{i}{\sqrt{21}}q^{\frac{5}{12}}$
$\frac{1}{3}$	$e\left(\frac{z}{7}\right)$	$\frac{-z}{3z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{7}}e^{\frac{2\pi i}{21}}q^{\frac{5}{12}}$	$\frac{1}{\sqrt{7}}e^{-\frac{4\pi i}{21}}q^{\frac{11}{12}}$
$\frac{1}{7}$	$e\left(\frac{z}{3}\right)$	$\frac{-z}{7z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{13\pi i}{9}}q^{\frac{5}{12}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{7\pi i}{9}}q^{\frac{11}{12}}$

- $f_1(z)=\eta(z)\eta(49z)\in S_1(\Gamma_0(49),\chi)$, $f_2(z)=\eta(7z)^2\in S_1(\Gamma_0(49),\chi^7)$

cusp	q	$\varphi(z)$	$f_1\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項	$f_2\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項
$i\infty$	$e(z)$	id	$q^{\frac{25}{12}}$	$q^{\frac{7}{12}}$
0	$e\left(\dfrac{z}{49}\right)$	$\dfrac{-1}{z}$	$-\dfrac{i}{\sqrt{7}}q^{\frac{25}{12}}$	$-\dfrac{i}{\sqrt{7}}q^{\frac{7}{12}}$
$\dfrac{1}{7}$	$e(z)$	$\dfrac{-z}{7z-1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{7}}e^{-\frac{10\pi i}{21}}q^{\frac{1}{12}}$	$e^{-\frac{\pi i}{6}}q^{\frac{7}{12}}$
$\dfrac{2}{7}$	$e(z)$	$\dfrac{-4z+1}{7z-2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{7}}e^{\frac{5\pi i}{7}}q^{\frac{1}{12}}$	$e^{\frac{\pi i}{2}}q^{\frac{11}{12}}$
$\dfrac{3}{7}$	$e(z)$	$\dfrac{-5z+2}{7z-3}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{7}}e^{\frac{10\pi i}{21}}q^{\frac{1}{12}}$	$e^{\frac{5\pi i}{6}}q^{\frac{11}{12}}$
$\dfrac{4}{7}$	$e(z)$	$\dfrac{-2z+1}{7z-4}$	$\dfrac{1}{\sqrt{7}}e^{-\frac{\pi i}{7}}q^{\frac{1}{12}}$	$e^{\frac{\pi i}{2}}q^{\frac{11}{12}}$
$\dfrac{5}{7}$	$e(z)$	$\dfrac{-3z+2}{7z-5}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{7}}e^{\frac{34\pi i}{21}}q^{\frac{1}{12}}$	$e^{\frac{5\pi i}{6}}q^{\frac{11}{12}}$
$\dfrac{6}{7}$	$e(z)$	$\dfrac{-6z+5}{7z-6}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{7}}e^{\frac{4\pi i}{7}}q^{\frac{1}{12}}$	$e^{-\frac{\pi i}{2}}q^{\frac{11}{12}}$

すでに説明したように η 関数は複素上半平面上に零点を持たないので，η 関数による割り算が可能である．よって，次に，η 関数の分数の型で表される cusp form について考察する．

まず，$N=14$ の場合について，次の命題が成立する．

命題 4.2.6

$f_1=\eta(z)\eta(14z)$, $f_2=\eta(2z)\eta(7z)$ とし，f_1 の $\Gamma_0(14)$ に関する指標を χ とする．このとき，

$$\frac{{f_1}^2}{f_2}\in S_1(\Gamma_0(14),\chi^3)$$
$$\frac{{f_2}^2}{f_1}\in S_1(\Gamma_0(14),\chi^5)$$

証明

$g=\dfrac{{f_1}^2}{f_2}=\dfrac{\eta(z)^2\eta(14z)^2}{\eta(2z)\eta(7z)}$, $h=\dfrac{{f_2}^2}{f_1}=\dfrac{\eta(2z)^2\eta(7z)^2}{\eta(z)\eta(14z)}$ とおく．

$f_2=\eta(2z)\eta(7z)$ の指標は χ^7 と表される．$\chi^8=1$ だから，g の指標は，$\dfrac{\chi^2}{\chi^7}=\chi^3$, h の指標は，$\dfrac{\chi^{14}}{\chi}=\chi^5$ である．したがって，各 cusp において g,h が零点を持つかどうか調べれば良いが，f_1,f_2 の各 cusp での展開についてはすでに決定しているので，それを利用する．つまり，

1. cusp $i\infty$ の場合

   cusp $i\infty$ では，$q=e(z)$ を用いて，g,h は次のように q 展開できる．

$$g=\frac{\eta(z)^2\eta(14z)^2}{\eta(2z)\eta(7z)}=\frac{\{q^{\frac{5}{8}}+\cdots\}^2}{q^{\frac{3}{8}}+\cdots}=q^{\frac{7}{8}}+\cdots$$
$$h=\frac{\eta(2z)^2\eta(7z)^2}{\eta(z)\eta(14z)}=\frac{\{q^{\frac{3}{8}}+\cdots\}^2}{q^{\frac{5}{8}}+\cdots}=q^{\frac{1}{8}}+\cdots$$

よって，いずれも q の正数べきから始まるべき級数である．つまり，cusp $i\infty$ において零点を持つことがわかる．

2. cusp 0 の場合

   $\varphi(0)=i\infty$ なる φ として，$\varphi(z)=-\dfrac{1}{z}$ をとる．$q=e\Big(\dfrac{z}{14}\Big)$ とおく．このとき，

$$g|[\varphi]_1(z)=g(\varphi^{-1}(z))\left(\frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz}\right)^{1/2}=\frac{\{-\frac{i}{\sqrt{14}}q^{\frac{5}{8}}+\cdots\}^2}{-\frac{i}{\sqrt{14}}q^{\frac{3}{8}}+\cdots}=\frac{-i}{\sqrt{14}}q^{\frac{7}{8}}+\cdots$$

$$h|[\varphi]_1(z)=h(\varphi^{-1}(z))\left(\frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz}\right)^{1/2}=\frac{\{-\frac{i}{\sqrt{14}}q^{\frac{3}{8}}+\cdots\}^2}{-\frac{i}{\sqrt{14}}q^{\frac{5}{8}}+\cdots}=\frac{-i}{\sqrt{14}}q^{\frac{1}{8}}+\cdots$$

   したがって，cusp 0 で零点を持つことがわかった．

3. cusp $\dfrac{1}{2}$ の場合

   $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)=i\infty$ なる φ として，$\varphi(z)=\dfrac{-z}{2z-1}$ をとる．$q=e\Big(\dfrac{z}{7}\Big)$ とおく．このとき，

$$g|[\varphi]_1(z)=g(\varphi^{-1}(z))\left(\frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz}\right)^{1/2}=\frac{\{\frac{1}{\sqrt{7}}e^{\frac{5\pi i}{28}}q^{\frac{3}{8}}+\cdots\}^2}{\frac{1}{\sqrt{7}}e^{-\frac{\pi i}{28}}q^{\frac{5}{8}}+\cdots}=\frac{1}{\sqrt{7}}e^{\frac{11\pi i}{28}}q^{\frac{1}{8}}+\cdots$$

$$h|[\varphi]_1(z)=h(\varphi^{-1}(z))\left(\frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz}\right)^{1/2}=\frac{\{\frac{1}{\sqrt{7}}e^{-\frac{\pi i}{28}}q^{\frac{5}{8}}+\cdots\}^2}{\frac{1}{\sqrt{7}}e^{\frac{5\pi i}{28}}q^{\frac{3}{8}}+\cdots}=\frac{1}{\sqrt{7}}e^{-\frac{\pi i}{4}}q^{\frac{7}{8}}+\cdots$$

   したがって，cusp $\dfrac{1}{2}$ で零点を持つことがわかった．

4. cusp $\dfrac{1}{7}$ の場合

   $\varphi\left(\dfrac{1}{7}\right)=i\infty$ なる φ として，$\varphi(z)=\dfrac{-z}{7z-1}$ をとる．$q=e\Big(\dfrac{z}{2}\Big)$ とおく．このとき，

$$g|[\varphi]_1(z)=g(\varphi^{-1}(z))\left(\frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz}\right)^{1/2}=\frac{\{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{11\pi i}{8}}q^{\frac{3}{8}}+\cdots\}^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{13\pi i}{8}}q^{\frac{5}{8}}+\cdots}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{9\pi i}{8}}q^{\frac{1}{8}}+\cdots$$

$$h|[\varphi]_1(z)=h(\varphi^{-1}(z))\left(\frac{d\varphi^{-1}(z)}{dz}\right)^{1/2}=\frac{\{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{13\pi i}{8}}q^{\frac{5}{8}}+\cdots\}^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{11\pi i}{8}}q^{\frac{3}{8}}+\cdots}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{15\pi i}{8}}q^{\frac{7}{8}}+\cdots$$

   したがって，cusp $\dfrac{1}{7}$ で零点を持つことがわかった．

$\square$

さて，実は，$f_1f_2=gh$ であり，$f_1f_2{=}\eta(z)\eta(2z)\eta(7z)\eta(14z)\in S_2(\Gamma_0(14))$ である．ここで，先ほどの結果と比べてみよう．

$f|[\varphi]_1$ の q 展開の初項

cusp	q	f_1f_2 の q 展開の初項	g の q 展開の初項	h の q 展開の初項
$i\infty$	$e(z)$	q	$q^{\frac{7}{8}}$	$q^{\frac{1}{8}}$
0	$e\left(\frac{z}{14}\right)$	$-\frac{1}{14}q$	$\frac{-i}{\sqrt{14}}q^{\frac{7}{8}}$	$\frac{-i}{\sqrt{14}}q^{\frac{1}{8}}$
$\frac{1}{2}$	$e\left(\frac{z}{7}\right)$	$-\frac{1}{7}e^{\frac{-6\pi i}{7}}q$	$\frac{1}{\sqrt{7}}e^{\frac{11\pi i}{28}}q^{\frac{1}{8}}$	$\frac{1}{\sqrt{7}}e^{-\frac{\pi i}{4}}q^{\frac{7}{8}}$
$\frac{1}{7}$	$e\left(\frac{z}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{9\pi i}{8}}q^{\frac{1}{8}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{15\pi i}{8}}q^{\frac{7}{8}}$

確かに，(f_1f_2 の q 展開の初項)=(g の q 展開の初項)×(h の q 展開の初項) となっていることが確認できる．

次に，N=24 の場合について，次の 2 つの命題が成立する．

命題 4.2.7
$f_1 = \eta(2z)\eta(12z)$，$f_2 = \eta(4z)\eta(6z)$ とし，f_1 の $\Gamma_0(24)$ に関する指標を χ とする．このとき，

$$\frac{{f_1}^3}{{f_2}^2} \in S_1(\Gamma_0(24), \chi^5)$$
$$\frac{{f_2}^3}{{f_1}^2} \in S_1(\Gamma_0(24), \chi^7)$$

証明
$g = \dfrac{{f_1}^3}{{f_2}^2} = \dfrac{\eta(2z)^3\eta(12z)^3}{\eta(4z)^2\eta(6z)^2}$，$h = \dfrac{{f_2}^3}{{f_1}^2} = \dfrac{\eta(4z)^3\eta(6z)^3}{\eta(2z)^2\eta(12z)^2}$ とおく．

証明の詳細については，N=14 の場合に同じであるので省略する．

以下に各 cusp でべき級数に展開した時の初項のみを表にまとめておく．

cusp	q	$\varphi(z)$	$g\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項	$h\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項
$i\infty$	$e(z)$	id	$q^{\frac{11}{12}}$	$q^{\frac{1}{12}}$
0	$e\left(\frac{z}{24}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{i}{\sqrt{24}}q^{\frac{11}{12}}$	$-\frac{i}{\sqrt{24}}q^{\frac{1}{12}}$
$\frac{1}{2}$	$e\left(\frac{z}{6}\right)$	$\frac{-z}{2z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}e^{\frac{41\pi i}{72}}q^{\frac{11}{12}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}e^{-\frac{29\pi i}{72}}q^{\frac{1}{12}}$
$\frac{1}{3}$	$e\left(\frac{z}{8}\right)$	$\frac{-z}{3z-1}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{\frac{19\pi i}{48}}q^{\frac{1}{12}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{32\pi i}{48}}q^{\frac{11}{12}}$
$\frac{1}{4}$	$e\left(\frac{z}{3}\right)$	$\frac{-z}{4z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\pi i}{36}}q^{\frac{1}{12}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{11\pi i}{36}}q^{\frac{11}{12}}$
$\frac{1}{6}$	$e\left(\frac{z}{2}\right)$	$\frac{-z}{6z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{11\pi i}{24}}q^{\frac{1}{12}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{23\pi i}{24}}q^{\frac{11}{12}}$
$\frac{1}{8}$	$e\left(\frac{z}{3}\right)$	$\frac{-z}{8z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{10\pi i}{9}}q^{\frac{1}{12}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{2\pi i}{9}}q^{\frac{11}{12}}$
$\frac{1}{12}$	$e(z)$	$\frac{-z}{12z-1}$	$e^{\frac{13\pi i}{12}}q^{\frac{11}{12}}$	$e^{-\frac{\pi i}{12}}q^{\frac{1}{12}}$

□

命題 4.2.8

$f_1 = \eta(2z)\eta(12z), f_2 = \eta(4z)\eta(6z)$ とし，f_1 の $\Gamma_0(24)$ に関する指標を χ とする．このとき，

$$\frac{{f_1}^2}{f_2} \in S_1(\Gamma_0(14), \chi^3)$$
$$\frac{{f_2}^2}{f_1} \in S_1(\Gamma_0(14), \chi^9)$$

証明

$g = \dfrac{{f_1}^2}{f_2} = \dfrac{\eta(2z)^2\eta(12z)^2}{\eta(4z)\eta(6z)}, h = \dfrac{{f_2}^2}{f_1} = \dfrac{\eta(4z)^2\eta(6z)^2}{\eta(2z)\eta(12z)}$ とおく．

証明の詳細については，N=14 の場合に同じであるので省略する．

以下に各 cusp でべき級数に展開した時の初項のみを表にまとめておく．

cusp	q	$\varphi(z)$	$g\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項	$h\|[\varphi]_1$ の q 展開の初項
$i\infty$	$e(z)$	id	$q^{\frac{3}{4}}$	$q^{\frac{1}{4}}$
0	$e\left(\frac{z}{24}\right)$	$\frac{-1}{z}$	$-\frac{i}{\sqrt{24}}q^{\frac{3}{4}}$	$-\frac{i}{\sqrt{24}}q^{\frac{1}{4}}$
$\frac{1}{2}$	$e\left(\frac{z}{6}\right)$	$\frac{-z}{2z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}e^{\frac{9\pi i}{24}}q^{\frac{3}{4}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}e^{-\frac{5\pi i}{24}}q^{\frac{1}{4}}$
$\frac{1}{3}$	$e\left(\frac{z}{8}\right)$	$\frac{-z}{3z-1}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi i}{16}}q^{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{7\pi i}{16}}q^{\frac{3}{4}}$
$\frac{1}{4}$	$e\left(\frac{z}{3}\right)$	$\frac{-z}{4z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\pi i}{12}}q^{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3\pi i}{12}}q^{\frac{3}{4}}$
$\frac{1}{6}$	$e\left(\frac{z}{2}\right)$	$\frac{-z}{6z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi i}{8}}q^{\frac{1}{4}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi i}{8}}q^{\frac{3}{4}}$
$\frac{1}{8}$	$e\left(\frac{z}{3}\right)$	$\frac{-z}{8z-1}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{4\pi i}{3}}q^{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}q^{\frac{3}{4}}$
$\frac{1}{12}$	$e(z)$	$\frac{-z}{12z-1}$	$e^{\frac{5\pi i}{4}}q^{\frac{3}{4}}$	$e^{\frac{7\pi i}{4}}q^{\frac{1}{4}}$

□

この章の最後に，次の予想を挙げておく．

予想
$N=17,19,21,49$ に対して，$F(z)\in S_2(\Gamma_0(N))$ とする．このとき，次のように，weight 1 の cusp form が構成できる．

$$\begin{aligned}
\frac{F(z)}{\eta(z)\eta(17z)} &\in S_1(\Gamma_0(17),\chi^3)\\
\frac{F(z)}{\eta(z)\eta(19z)} &\in S_1(\Gamma_0(19),\chi^5)\\
\frac{F(z)}{\eta(z)\eta(21z)} &\in S_1(\Gamma_0(21),\chi^{11})\\
\frac{F(z)}{\eta(3z)\eta(7z)} &\in S_1(\Gamma_0(21),\chi^5)\\
\frac{F(z)}{\eta(7z)^2} &\in S_1(\Gamma_0(49),\chi^5)
\end{aligned}$$

注 . 5
これらの予想について証明であるが，$F(z)$ の展開が $q=e(z)$ から始まることにより，各左辺が cusp $i\infty$ において零点を持つことは分かるが，他の cusp においても，確かに零点を持っているかどうかについては，不明である．しかし，本論文最後の計算結果を見る限り，これらの予想は正しいように思える．

5 $S_1(\Gamma_0(N),\chi)$ の次元について

すでに求めた 2 つの η 関数の積で構成した, 指標 χ を持つ $\Gamma_0(N)$ に関する weight 1 の cusp form の次元を決定する．

まず，$\Gamma_0(N)$ に関する指標の付かない modular form, cusp form の次元について，次の命題が成立する．

命題 5.0.9

$$\dim A_1(\Gamma_0(N))=0$$
$$\dim S_1(\Gamma_0(N))=0$$

証明
まず，$-1\in\Gamma_0(N)$ より，$\dim A_1(\Gamma_0(N))=0$. $A_1(\Gamma_0(N))\supset S_1(\Gamma_0(N))$ より，$\dim S_1(\Gamma_0(N))=0$
□

指標の付く cusp form の次元については，各 N について個別に検証していく．

5.1 N=11, 27, 20, 32, 36 の場合

これらの場合の，2 つの η 関数の積を f_1，$\Gamma_0(N)$ に関する指標を χ とおく．このとき，指標 χ は，位数 2 の real character であった．すなわち，

$$\chi : \Gamma_0(N) \longrightarrow \{+1, -1\}$$

さて，このとき，次の命題が成立する．

命題 5.1.1
$N = 11, 27, 20, 32, 36$ の場合,

$$\dim\, A_1(\Gamma_0(N), \chi) = 1$$
$$\dim\, S_1(\Gamma_0(N), \chi) = 1$$

証明
$f_1 \in S_1(\Gamma_0(N), \chi)$ であるので，$\dim\, A_1(\Gamma_0(N), \chi) \geq 1$, $\dim\, S_1(\Gamma_0(N), \chi) \geq 1$ が成立する．次に，$\dim\, A_1(\Gamma_0(N), \chi) \geq 2$ と仮定する．このとき，互いに独立な 2 つの modular form, g_1, $g_2 \in A_1(\Gamma_0(N), \chi)$ がとれる．すると，$g_1 f_1$, $g_2 f_1 \in S_2(\Gamma_0(N))$ になるが，$\dim\, S_2(\Gamma_0(N)) = 1$ であるから，これらは互いに従属関係にならなければならない．よって，$(c_1 g_1 + c_2 g_2) f_1 = 0$, $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ なる c_1, c_2 が存在する．したがって，$c_1 g_1 + c_2 g_2 = 0$ が成立し，g_1，g_2 は互いに従属関係になるので，矛盾．以上より，$\dim\, A_1(\Gamma_0(N), \chi) = 1$ となる．これより，$\dim\, S_1(\Gamma_0(N), \chi) = 1$ も成立する． □

5.2 N=15 の場合

$f_1(z) = \eta(z)\eta(15z)$, $f_2(z) = \eta(3z)\eta(5z)$ とおく．
$\Gamma_0(15)$ の指標 χ を

$$\chi \begin{pmatrix} a & b \\ 15c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{-15}{d}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i}{3}(ac + cd + db)\right)$$

と定めるとき，$\chi^6 = 1$ であり，

$$\begin{aligned} f_1(z) &\in S_1(\Gamma_0(15), \chi) \\ f_2(z) &\in S_1(\Gamma_0(15), \chi^5) \end{aligned}$$

であった (命題 4.2.2 参照)．
さて，次の命題が成立する．

命題 5.2.1

$$\dim\, S_1(\Gamma_0(15), \chi) = 1$$
$$\dim\, S_1(\Gamma_0(15), \chi^2) = 0$$
$$\dim\, S_1(\Gamma_0(15), \chi^3) = 0$$
$$\dim\, S_1(\Gamma_0(15), \chi^4) = 0$$
$$\dim\, S_1(\Gamma_0(15), \chi^5) = 1$$

証明

$f_1 \in S_1(\Gamma_0(15),\chi)$ であるので，dim $S_1(\Gamma_0(15),\chi) \geq 1$ が成立する．次に，dim $S_1(\Gamma_0(15),\chi) \geq 2$ と仮定する．このとき，互いに独立な 2 つの cusp form, g_1, $g_2 \in S_1(\Gamma_0(15),\chi)$ がとれる．すると，$f_2 \in S_1(\Gamma_0(15),\chi^5)$ であるので，$g_1 f_2$, $g_2 f_2 \in S_2(\Gamma_0(15))$ になるが，dim $S_2(\Gamma_0(15)) = 1$ であるから，これらは互いに従属関係になければばならない．よって，$(c_1 g_1 + c_2 g_2) f_2 = 0$, $(c_1, c_2) \neq (0,0)$ なる c_1, c_2 が存在する．したがって，$c_1 g_1 + c_2 g_2 = 0$ が成立し，g_1, g_2 は互いに従属関係になるので，矛盾．以上より，dim $S_1(\Gamma_0(15),\chi) = 1$ となる．また，$\chi^2(-1) = \chi^4(-1) = 1 \neq -1$ であることから，dim $A_1(\Gamma_0(15),\chi^2) = \mathrm{dim} A_1(\Gamma_0(15),\chi^4)$=0 となるので，dim $S_1(\Gamma_0(15),\chi^2) = \mathrm{dim} S_1(\Gamma_0(15),\chi^4)$=0 が成立する．

最後に，dim $S_1(\Gamma_0(15),\chi^3)$ について検証する．

$$\chi^3 \begin{pmatrix} a & b \\ 15c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{-15}{d} \right)$$

であり，このとき，χ^3 を指標にもつ weight 1 の modular form は次のように ϑ 関数を用いて表現できる．

$$\begin{aligned} \vartheta_1(z) &= \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^2} \exp(2\pi i ({m_1}^2 + m_1 m_2 + 4{m_2}^2) z) \\ \vartheta_2(z) &= \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^2} \exp(2\pi i (2{m_1}^2 + m_1 m_2 + 2{m_2}^2) z) \end{aligned}$$

例 2.3 で説明したとおり，これら 2 つの ϑ 関数は独立である．したがって，dim $A_1(\Gamma_0(15),\chi^3) \geq 2$ である．ここで，dim $S_1(\Gamma_0(15),\chi^3) \geq 1$ と仮定する．このとき，$g_3 \in S_1(\Gamma_0(15),\chi_1^3)$ がとれる．すると，$g_3\vartheta_1(z)$, $g_3\vartheta_2(z) \in S_2(\Gamma_0(15))$ になるが，dim $S_2(\Gamma_0(15)) = 1$ であるから矛盾する．したがって，dim $S_1(\Gamma_0(15),\chi^3) = 0$ であることがわかる． □

5.3 N=17 の場合

$f_1(z) = \eta(z)\eta(17z)$ とおく．

$\Gamma_0(17)$ の指標 χ を

$$\chi \begin{pmatrix} a & b \\ 17c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{d}{17} \right) \sin'(\sigma)$$

と定めるとき，$\chi^4 = 1$ であり，

$$f_1(z) \in S_1(\Gamma_0(17),\chi)$$

であった (命題 4.2.3 参照)．

このとき，次の命題が成立する．

命題 5.3.1

$$\begin{aligned} \dim S_1(\Gamma_0(17),\chi) &\geq 1 \\ \dim S_1(\Gamma_0(17),\chi^2) &= 0 \\ \dim S_1(\Gamma_0(17),\chi^3) &\leq 1 \end{aligned}$$

証明
$f_1(z) \in S_1(\Gamma_0(17),\chi)$ より，$\dim S_1(\Gamma_0(17),\chi) \geq 1$ であることがわかる．$\dim S_1(\Gamma_0(17),\chi^2)$ については，$\chi^2(-1) \neq -1$ であるので，$\dim A_1(\Gamma_0(17),\chi^2) = 0$ であり，$\dim S_1(\Gamma_0(17),\chi^2) = 0$ であることがわかる．次に，$\dim S_1(\Gamma_0(17),\chi^3) \geq 2$ と仮定すると，互いに独立な cuspform, g_1, $g_2 \in S_1(\Gamma_0(17),\chi^3)$ がとれる．すると，$g_1 f_1$, $g_2 f_1 \in S_2(\Gamma_0(17))$ になるが，$\dim S_2(\Gamma_0(17)) = 1$ であるから，これらは互いに従属関係になければならない．よって，$(c_1 g_1 + c_2 g_2) f_1 = 0$, $(c_1, c_2) \neq (0,0)$ なる c_1, c_2 が存在する．したがって，$c_1 g_1 + c_2 g_2 = 0$ が成立し，g_1, g_2 は互いに従属関係になるので，矛盾．以上より，$\dim S_1(\Gamma_0(17),\chi^3) \leq 1$ となる． □

注．6
$\dim S_2(\Gamma_0(17)) = 1$ であるので，

$$\dim S_1(\Gamma_0(17),\chi) \geq 2 \implies \dim S_1(\Gamma_0(17),\chi^3) = 0$$

$$\dim S_1(\Gamma_0(17),\chi^3) = 1 \implies \dim S_1(\Gamma_0(17),\chi) = 1$$

であることが言える．

予想
$F(z)$ を $\Gamma_0(17)$ に関する weight 2 の cusp form とする．今，$f_1(z) = \eta(z)\eta(17z)$ とおき，$f_2(z) = \dfrac{F(z)}{f_1(z)}$ と定義する．$f_1(z)$ の指標を χ とすれば，f_2 の指標は χ^3 である．つまり，このとき，

$$f_2(z) \in S_1(\Gamma_0(17),\chi^3)$$

であり，さらに，

$$\begin{aligned}\dim S_1(\Gamma_0(17),\chi) &= 1\\ \dim S_1(\Gamma_0(17),\chi^2) &= 0\\ \dim S_1(\Gamma_0(17),\chi^3) &= 1\end{aligned}$$

が成立する．

注．7
これらの予想については，本論文最後の計算結果から，正しいように思われる．

5.4 N=19 の場合

$f_1(z) = \eta(z)\eta(19z)$ とおく．
$\Gamma_0(19)$ の指標 χ を

$$\chi\begin{pmatrix} a & b \\ 19c & d \end{pmatrix} = (-1)^c \left(\frac{-19}{d}\right) \exp\left(-\frac{\pi i}{3}(ac + cd + db - bdc^2)\right)$$

と定めると，$\chi^6 = 1$ であり，

$$f_1(z) \in S_1(\Gamma_0(19),\chi)$$

であった．
このとき，次の命題が成立する．

命題 5.4.1

$$\dim\ S_1(\Gamma_0(19),\chi) \geq 1$$
$$\dim\ S_1(\Gamma_0(19),\chi^2) = 0$$
$$\dim\ S_1(\Gamma_0(19),\chi^3) \leq 1$$
$$\dim\ S_1(\Gamma_0(19),\chi^4) = 0$$
$$\dim\ S_1(\Gamma_0(19),\chi^5) \leq 1$$

証明

$f_1(z) \in S_1(\Gamma_0(19),\chi)$ より，$\dim\ S_1(\Gamma_0(19),\chi) \geq 1$ が成立する．次に，$\dim\ S_1(\Gamma_0(19),\chi^5) \geq 2$ と仮定すると，互いに独立な cuspform, g_1，$g_2 \in S_1(\Gamma_0(19),\chi^5)$ がとれる．すると，g_1f_1，$g_2f_1 \in S_2(\Gamma_0(19))$ になるが，$\dim\ S_2(\Gamma_0(19)) = 1$ であるから，これらは互いに従属関係になければならない．よって，$(c_1g_1+c_2g_2)f_1 = 0, (c_1,c_2) \neq (0,0)$ なる c_1，c_2 が存在する．したがって，$c_1g_1+c_2g_2 = 0$ が成立し，g_1，g_2 は互いに従属関係になるので，矛盾．以上より，$\dim\ S_1(\Gamma_0(19),\chi^5) \neq 1$ となる．また，$\dim\ S_1(\Gamma_0(19),\chi^2), \dim\ S_1(\Gamma_0(19),\chi^4)$ については，$\chi^2(-1) = \chi^4(-1) = 1 \neq -1$ であるので，$\dim\ A_1(\Gamma_0(19),\chi^2) = \dim A_1(\Gamma_0(19),\chi^4) = 0$ であり，$\dim\ S_1(\Gamma_0(17),\chi^2) = \dim S_1(\Gamma_0(17),\chi^4) = 0$ であることがわかる．

次に，$\dim\ S_1(\Gamma_0(19),\chi^3)$ について調べる．

まず，$\dim S_1(\Gamma_0(19),\chi^3) \geq 2$ と仮定すると，互いに独立な 2 つの cusp form $g_1, g_2 \in S_1(\Gamma_0(19),\chi^3)$ が存在する．このとき，g_1^2 と g_1g_2 はともに weight2 の cusp form になるが，$\dim\ S_2(\Gamma_0(19)) = 1$ であることから，これらは互いに従属となり，$g_1(c_1g_1+c_2g_2) = 0$ なる $(c_1,c_2) \neq (0,0)$ が存在することになる．すると，g_1, g_2 も互いに従属となり矛盾が生じる．したがって，$\dim\ S_1(\Gamma_0(19),\chi^3) \leq 1$ が成立する． □

さて，χ^3 は次のように表される．

$$\chi^3 \begin{pmatrix} a & b \\ 19c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{-19}{d}\right) \mathrm{sgn}\sigma$$

このように，指標に $\mathrm{sgn}\sigma$ なる符号がついてしまうため，N=15 の場合のように，ϑ 関数を用いて，weight 1 の modular form が構成することはできない．

注 . 8

$\dim\ S_2(\Gamma_0(19)) = 1$ であるので，

$$\dim\ S_1(\Gamma_0(19),\chi) \geq 2 \implies \dim\ S_1(\Gamma_0(19),\chi^5) = 0$$
$$\dim\ S_1(\Gamma_0(19),\chi^5) = 1 \implies \dim\ S_1(\Gamma_0(19),\chi) = 1$$

であることが言える．

予想

$F(z)$ を $\Gamma_0(19)$ に関する weight2 の cusp form とする．今，$f_1(z) = \eta(z)\eta(19z)$ とおき，$f_2(z) = \dfrac{F(z)}{f_1(z)}$ と定義する．$f_1(z)$ の指標を χ とおけば，$f_2(z)$ の指標は χ^5 である．このとき，

$$f_2(z) \in S_1(\Gamma_0(19),\chi^5)$$

であり，さらに，次が成立する．

$$\begin{aligned}\dim S_1(\Gamma_0(19),\chi)&=1\\ \dim S_1(\Gamma_0(19),\chi^2)&=0\\ \dim S_1(\Gamma_0(19),\chi^3)&\le 1\\ \dim S_1(\Gamma_0(19),\chi^4)&=0\\ \dim S_1(\Gamma_0(19),\chi^5)&=1\end{aligned}$$

注 . 9
これらの予想についても，本論文最後の計算結果から，正しいように思われる．

5.5 N=14 の場合

$f_1(z)=\eta(z)\eta(14z)$, $f_2(z)=\eta(2z)\eta(7z)$ とおく．
$\Gamma_0(14)$ の指標 χ を

$$\chi_1\begin{pmatrix}a & b\\ 14c & d\end{pmatrix}=\begin{cases}\left(\dfrac{14}{|d|}\right)\exp\left(-\dfrac{\pi i}{4}(3ac+bd+2c)\right) & ,\quad (c:\mathrm{odd})\\ \left(\dfrac{-14}{d}\right)\exp\left(\dfrac{\pi i}{4}(ac+bd-2cd)\right) & ,\quad (c:\mathrm{even})\end{cases}$$

と定めると，$\chi^8=1$ であり，

$$\begin{aligned}f_1(z)&\in S_1(\Gamma_0(14),\chi)\\ f_2(z)&\in S_1(\Gamma_0(14),\chi^7)\end{aligned}$$

であった (命題 4.2.2 参照).
このとき，次の命題が成立する．

命題 5.5.1

$$\begin{aligned}\dim S_1(\Gamma_0(14),\chi)&=1\\ \dim S_1(\Gamma_0(14),\chi^2)&=0\\ \dim S_1(\Gamma_0(14),\chi^3)&=1\\ \dim S_1(\Gamma_0(14),\chi^4)&=0\\ \dim S_1(\Gamma_0(14),\chi^5)&=1\\ \dim S_1(\Gamma_0(14),\chi^6)&=0\\ \dim S_1(\Gamma_0(14),\chi^7)&=1\end{aligned}$$

証明
まず，$f_1(z)\in S_1(\Gamma_0(14),\chi)$ より，$\dim S_1(\Gamma_0(14),\chi)\ge 1$ である．$\dim S_1(\Gamma_0(14),\chi)\ge 2$ と仮定すると，互いに独立な cusp form g_1,g_2 が取れる．$f_2(z)\in S_1(\Gamma_0(14),\chi^7)$ であるから，$g_1f_2,g_2f_2\in S_2(\Gamma_0(14))$ になるが，$\dim S_2(\Gamma_0(14))=1$ であるため，これらは互いに従属でなければならない．

よって，$(c_1g_1+c_2g_2)f_2=0, (c_1,c_2)\neq(0,0)$ なる c_1,c_2 が存在する．したがって，$c_1g_1+c_2g_2=0$ が成立し，g_1，g_2 は互いに従属関係になるので，矛盾．以上より，$\dim S_1(\Gamma_0(14),\chi)=1$ となる．同様にして，$\dim S_1(\Gamma_0(14),\chi^7)=1$ であることもわかる．また，$\chi^2(-1)=\chi^4(-1)=\chi^6(-1)=1\neq-1$ であるので，$\dim S_1(\Gamma_0(14),\chi^2)=\dim S_1(\Gamma_0(14),\chi^4)=\dim S_1(\Gamma_0(14),\chi^6)=0$ となる．

さて，$\dfrac{f_1(z)^2}{f_2(z)}\in S_1(\Gamma_0(14),\chi^3)$，$\dfrac{f_2(z)^2}{f_1(z)}\in S_1(\Gamma_0(14),\chi^5)$ であるから，$\dim S_1(\Gamma_0(14),\chi^3)\geq 1, \dim S_1(\Gamma_0(14),\chi^5)\geq 1$ である．ここで，$\dim S_1(\Gamma_0(14),\chi^3)\geq 2$ と仮定すると，互いに独立な 2 つの cusp form $g_1,g_2\in S_1(\Gamma_0(14),\chi^3)$ が存在する．すると，$g_1\dfrac{f_2(z)^2}{f_1(z)}, g_2\dfrac{f_2(z)^2}{f_1(z)}\in S_2(\Gamma_0(14))$ になるが，$\dim S_2(\Gamma_0(14))=1$ であることから，これらは互いに従属でなければならない．よって，$\dfrac{f_2(z)^2}{f_1(z)}(c_1g_1+c_2g_2)=0$ なる $(c_1,c_2)\neq(0,0)$ が存在することになる．すると，g_1,g_2 も互いに従属となり矛盾が生じる．したがって，$\dim S_1(\Gamma_0(14),\chi^3)=1$ であることがわかる．同様にして，$\dim S_1(\Gamma_0(14),\chi^5)=1$ であることもわかる． □

5.6 N=24 の場合

$f_1(z)=\eta(2z)\eta(12z)$, $f_2(z)=\eta(4z)\eta(6z)$ とおく．

$\Gamma_0(24)$ の指標 χ を

$$\chi\begin{pmatrix} a & b \\ 24c & d \end{pmatrix}=\left(\frac{-6}{d}\right)\exp\left(-\frac{5\pi i}{6}(ac+bd-2cd)\right)$$

とおくと，$\chi^{12}=1$ であり，

$$\begin{aligned} f_1(z) &\in S_1(\Gamma_0(24),\chi) \\ f_2(z) &\in S_1(\Gamma_0(24),\chi^{11}) \end{aligned}$$

であった (命題 4.2.2 参照)．

このとき，次の命題が成立する．

命題 5.6.1

$$\begin{aligned}
\dim S_1(\Gamma_0(24),\chi)&=1\\
\dim S_1(\Gamma_0(24),\chi^2)&=0\\
\dim S_1(\Gamma_0(24),\chi^3)&=1\\
\dim S_1(\Gamma_0(24),\chi^4)&=0\\
\dim S_1(\Gamma_0(24),\chi^5)&=1\\
\dim S_1(\Gamma_0(24),\chi^6)&=0\\
\dim S_1(\Gamma_0(24),\chi^7)&=1\\
\dim S_1(\Gamma_0(24),\chi^8)&=0\\
\dim S_1(\Gamma_0(24),\chi^9)&=1\\
\dim S_1(\Gamma_0(24),\chi^{10})&=0\\
\dim S_1(\Gamma_0(24),\chi^{11})&=1
\end{aligned}$$

証明
まず，$f_1(z)\in S_1(\Gamma_0(24),\chi)$，　$f_2(z)\in S_1(\Gamma_0(24),\chi^{11})$ であることから，これまでと同様に，dim $S_1(\Gamma_0(24),\chi)$ = dim $S_1(\Gamma_0(24),\chi^{11}) = 1$ となり，$\chi^2(-1)=\chi^4(-1)=\chi^6(-1)=\chi^8(-1)=\chi^{10}(-1)=1\neq -1$ であるので，dim $S_1(\Gamma_0(24),\chi^2)=\dim S_1(\Gamma_0(24),\chi^4)=\dim S_1(\Gamma_0(24),\chi^6)=\dim S_1(\Gamma_0(24),\chi^8)=\dim S_1(\Gamma_0(24),\chi^{10})=0$ となる．

さて，$\dfrac{f_1(z)^2}{f_2(z)}\in S_1(\Gamma_0(24),\chi^3)$，$\dfrac{f_2(z)^2}{f_1(z)}\in S_1(\Gamma_0(24),\chi^9)$ であるから，dim $S_1(\Gamma_0(24),\chi^3)\geq 1$, dim $S_1(\Gamma_0(24),\chi^9)\geq 1$ である．ここで，dim $S_1(\Gamma_0(24),\chi^3)\geq 2$ と仮定すると，互いに独立な 2 つの cusp form $g_1,g_2\in S_1(\Gamma_0(24),\chi^3)$ が存在する．すると，$g_1\dfrac{f_2(z)^2}{f_1(z)}, g_2\dfrac{f_2(z)^2}{f_1(z)}\in S_2(\Gamma_0(24))$ になるが，dim $S_2(\Gamma_0(24))=1$ であることから，これらは互いに従属でなければならない．よって，$\dfrac{f_2(z)^2}{f_1(z)}(c_1g_1+c_2g_2)=0$ なる $(c_1,c_2)\neq(0,0)$ が存在することになる．すると，g_1,g_2 も互いに従属となり矛盾が生じる．したがって，dim $S_1(\Gamma_0(24),\chi^3)=1$ であることがわかる．同様にして，dim $S_1(\Gamma_0(24),\chi^9)=1$ であることもわかる．

さて，$\dfrac{f_1(z)^3}{f_2(z)^2}\in S_1(\Gamma_0(24),\chi^5)$，$\dfrac{f_2(z)^3}{f_1(z)^2}\in S_1(\Gamma_0(24),\chi^7)$ であるから，dim $S_1(\Gamma_0(24),\chi_1^5)\geq 1$, dim $S_1(\Gamma_0(24),\chi^7)\geq 1$ である．ここで，$\dim S_1(\Gamma_0(24),\chi^5)\geq 2$ と仮定すると，互いに独立な 2 つの cusp form $g_1,g_2\in S_1(\Gamma_0(24),\chi^5)$ が存在する．すると，$g_1\dfrac{f_2(z)^3}{f_1(z)^2}, g_2\dfrac{f_2(z)^3}{f_1(z)^2}\in S_2(\Gamma_0(24))$ になるが，dim $S_2(\Gamma_0(24))=1$ であることから，これらは互いに従属でなければならない．よって，$\dfrac{f_2(z)^3}{f_1(z)^2}(c_1g_1+c_2g_2)=0$ なる $(c_1,c_2)\neq(0,0)$ が存在することになる．すると，g_1,g_2 も互いに従属となり矛盾が生じる．したがって，dim $S_1(\Gamma_0(24),\chi^5)=1$ であることがわかる．同様にして，dim $S_1(\Gamma_0(24),\chi^7)=1$ であることもわかる．　□

5.7　N=21 の場合

$f_1(z)=\eta(z)\eta(21z)$, $f_2(z)=\eta(3z)\eta(7z)$ とおく．
$\Gamma_0(21)$ の指標 χ を

$$\chi\begin{pmatrix} a & b \\ 21c & d\end{pmatrix}=\begin{cases}\left(\dfrac{d}{21}\right)\exp\left(-\dfrac{\pi i}{6}(ac+cd+4bd-3c)\right) & ,\quad (c:\mathrm{odd})\\ \left(\dfrac{-21}{d}\right)\exp\left(-\dfrac{\pi i}{6}(ac+bd-2cd)\right) & ,\quad (c:\mathrm{even})\end{cases}$$

と定めると，$\chi^{12}=1$ でり，

$$\begin{aligned} f_1(z) &\in S_1(\Gamma_0(21),\chi)\\ f_2(z) &\in S_1(\Gamma_0(21),\chi^7)\end{aligned}$$

が成立した (命題 4.2.4 参照)．
このとき，次の命題が成立する．

命題 5.7.1

$$\begin{array}{rcl}
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi) & \geq & 1 \\
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^2) & = & 0 \\
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^3) & = & (\text{不明}) \\
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^4) & = & 0 \\
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^5) & \leq & 1 \\
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^6) & = & 0 \\
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^7) & \geq & 1 \\
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^8) & = & 0 \\
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^9) & = & (\text{不明}) \\
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^{10}) & = & 0 \\
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^{11}) & \leq & 1
\end{array}$$

証明

まず，$f_1(z) \in S_1(\Gamma_0(21),\chi)$，$f_2(z) \in S_1(\Gamma_0(21),\chi^7)$ であることから，$\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi) \geq 1$, $\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^7) \geq 1$ が成立する．次に，$\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^{11}) \geq 2$ と仮定すると，互いに独立な cuspform, g_1，$g_2 \in S_1(\Gamma_0(21),\chi^{11})$ がとれる．すると，g_1f_1，$g_2f_1 \in S_2(\Gamma_0(21))$ になるが，$\dim\ S_2(\Gamma_0(21)) = 1$ であるから，これらは互いに従属関係になければならない．よって，$(c_1g_1+c_2g_2)f_1 = 0, (c_1,c_2) \neq (0,0)$ なる c_1, c_2 が存在する．したがって，$c_1g_1+c_2g_2 = 0$ が成立し，g_1，g_2 は互いに従属関係になるので，矛盾．以上より，$\dim S_1(\Gamma_0(21),\chi^{11}) \leq 1$ となる．同様に，$\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^5) \geq 2$ と仮定すると，互いに独立な cuspform, h_1，$h_2 \in S_1(\Gamma_0(21),\chi^5)$ がとれる．すると，h_1f_2，$h_2f_2 \in S_2(\Gamma_0(21))$ になるが，$\dim\ S_2(\Gamma_0(21)) = 1$ であるから，これらは互いに従属関係になければならない．よって，$(c_1h_1+c_2h_2)f_2 = 0, (c_1,c_2) \neq (0,0)$ なる c_1, c_2 が存在する．したがって，$c_1h_1+c_2h_2 = 0$ が成立し，h_1，h_2 は互いに従属関係になるので，矛盾．以上より，$\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^5) \leq 1$ となる．また，$\chi^2(-1) = \chi^4(-1) = \chi^6(-1) = \chi^8(-1) = \chi^{10}(-1) = 1 \neq -1$ であるので，これまでと同様に，$\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^2) = \dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^4) = \dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^6) = \dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^8) = \dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^{10}) = 0$ となることがわかる． □

注 . 10

$\dim S_2(\Gamma_0(21)) = 1$ であるので，

$$\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi) \geq 2 \implies \dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^{11}) = 0$$

$$\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^{11}) = 1 \implies \dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi) = 1$$

$$\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^7) \geq 2 \implies \dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^5) = 0$$

$$\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^5) = 1 \implies \dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi^7) = 1$$

であることが言える．

さて，次元が不明であった，χ^3, χ^9 の場合について考える．
まず，次元については，次のことが言える．

命題 5.7.2
dim $S_1(\Gamma_0(21),\chi^3)$ と dim $S_1(\Gamma_0(21),\chi^9)$ について，どちらか一方が 2 次元以上ならば，もう一方は 0 次元であり，どちらか一方が 1 次元以上なら，もう一方は 1 次元以下である．

また，χ^3,χ^9 は，$N=17$ の指標を求める際に定義した $\mathrm{sgn}'(\sigma)$ を用いて次のように表すことができる．$\overline{\mathrm{sgn}'\sigma}$ は $\mathrm{sgn}'\sigma$ の複素共役を表す．

$$\chi^3\begin{pmatrix} a & b \\ 21c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{d}{21}\right)\mathrm{sgn}'\sigma$$
$$\chi^9\begin{pmatrix} a & b \\ 21c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{d}{21}\right)\overline{\mathrm{sgn}'\sigma}$$

予想
$F(z)\in S_2(\Gamma_0(21))$ をとり，$f_4=\dfrac{F(z)}{f_1}, f_3=\dfrac{F(z)}{f_2}$ とおくと, $f_4\in S_1(\Gamma_0(21),\chi^{11}), f_3\in S_1(\Gamma_0(21),\chi^5)$ であり， 次が成立する．

$$\begin{array}{rcl}
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi_1) &=& 1\\
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi_1^2) &=& 0\\
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi_1^3) &=& (\text{不明})\\
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi_1^4) &=& 0\\
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi_1^5) &=& 1\\
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi_1^6) &=& 0\\
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi_1^7) &=& 1\\
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi_1^8) &=& 0\\
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi_1^9) &=& (\text{不明})\\
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi_1^{10}) &=& 0\\
\dim\ S_1(\Gamma_0(21),\chi_1^{11}) &=& 1
\end{array}$$

注 . 11
これらの予想についても，本論文最後の計算結果から，正しいように思われる．また，不明に終わっている χ^3,χ^9 に対しては，$N=24$ のときと同様に，χ,χ^{11} を用いて構成できると思われるが，それが cuso form になるかどうかについては不明である．

5.8 N=49 の場合

$f_1(z)=\eta(z)\eta(49z)$, $f_2(z)=\eta(7z)^2$ とおく．
$\Gamma_0(49)$ の指標 χ を

$$\chi\begin{pmatrix} a & b \\ 49c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{\pi i}{6}(ac+cd+bd-3c-bdc^2)\right) & ,\quad (c:\mathrm{odd}) \\ \left(\dfrac{-1}{d}\right)\exp\left(\dfrac{\pi i}{6}(ac+bd-2cd-bdc^2)\right) & ,\quad (c:\mathrm{even}) \end{cases}$$

と定めると，$\chi^{12}=1$ であり，

$$\begin{array}{rcl} f_1(z) & \in & S_1(\Gamma_0(49),\chi) \\ f_2(z) & \in & S_1(\Gamma_0(49),\chi^7) \end{array}$$

が成立した (命題 4.2.5 参照).

　このとき，次の命題が成立する．

命題 5.8.1

$$\begin{array}{rcl} \dim\ S_1(\Gamma_0(49),\chi) & \geq & 1 \\ \dim\ S_1(\Gamma_0(49),\chi^2) & = & 0 \\ \dim\ S_1(\Gamma_0(49),\chi^3) & = & (\text{不明}) \\ \dim\ S_1(\Gamma_0(49),\chi^4) & = & 0 \\ \dim\ S_1(\Gamma_0(49),\chi^5) & \leq & 1 \\ \dim\ S_1(\Gamma_0(49),\chi^6) & = & 0 \\ \dim\ S_1(\Gamma_0(49),\chi^7) & \geq & 1 \\ \dim\ S_1(\Gamma_0(49),\chi^8) & = & 0 \\ \dim\ S_1(\Gamma_0(49),\chi^9) & = & (\text{不明}) \\ \dim\ S_1(\Gamma_0(49),\chi^{10}) & = & 0 \\ \dim\ S_1(\Gamma_0(49),\chi^{11}) & = & 0 \end{array}$$

証明

χ^{11} 以外は，$N=21$ の場合に全く同じであるので，証明は省略させていただく．

　χ^{11} のときを考える．

　$F(z)\in S_2(\Gamma_0(49))$ をとる．このとき，本論文末の計算結果より，$F(z)$ は $q=e(z)$ で次のようにベキ級数展開ができる．

$$F(z)=q+q^2-q^4-3q^8-3q^9\cdots$$

また，$f_1(z)\in S_1(\Gamma_0(49),\chi)$ は，$y=x^2=q^{\frac{1}{12}}$ で次のようにベキ級数展開ができる．

$$f_1(z)=y^{25}-y^{37}-y^{49}+y^{85}+y^{109}\cdots$$

ここで，$F(z)$ を y で展開すると，$q=y^{12}$ だから，

$$F(z)=y^{12}+y^{24}-y^{48}-3y^{96}-3y^{108}\cdots$$

となる．したがって，$\dim\ S_1(\Gamma_0(49),\chi^{11})\geq 1$ と仮定すると，$g(z)\in S_1(\Gamma_0(49),\chi^{11})$ がとれ，$g(z)f_1(z)=c\,F(z)$ を満たさなければならない ($c\in\mathbb{C}$)．しかし，

$$\begin{array}{rcl} g(z) & = & \dfrac{c\,F(z)}{f_1(z)} \\ & = & c\,\dfrac{y^{12}+y^{24}-y^{48}-3y^{96}-3y^{108}\cdots}{y^{25}-y^{37}-y^{49}+y^{85}+y^{109}\cdots} \\ & = & c\,y^{-13}\cdots \end{array}$$

となり，cusp $i\infty$ で正則になっていない．つまり，$g(z)\notin S_1(\Gamma_0(49),\chi^{11})$ である．よって，dim $S_1(\Gamma_0(49),\chi^{11})=0$ □

注 . 12
dim $S_2(\Gamma_0(49))=1$ であるので，

$$\dim S_1(\Gamma_0(49),\chi^7)\geq 2 \implies \dim S_1(\Gamma_0(49),\chi^5)=0$$

$$\dim S_1(\Gamma_0(49),\chi^5)=1 \implies \dim S_1(\Gamma_0(49),\chi^7)=1$$

であることが言える．

さて，χ^3,χ^9 について考える．$N=21$ のときと同様，次元については，次のことが言える．

命題 5.8.2
$\dim S_1(\Gamma_0(49),\chi^3)$ と $\dim S_1(\Gamma_0(49),\chi^9)$ について，どちらか一方が 2 次元以上ならば，もう一方は 0 次元であり，どちらか一方が 1 次元以上なら，もう一方は 1 次元以下である．

また，χ^3,χ^9 は，先ほど定義した $\mathrm{sgn}'(\sigma)$ を用いて次のように表される．$\overline{\mathrm{sgn}'\sigma}$ は $\mathrm{sgn}'\sigma$ の複素共役を表す．

$$\chi^3\begin{pmatrix} a & b \\ 49c & d \end{pmatrix}=\overline{\mathrm{sgn}'\sigma}$$
$$\chi^9\begin{pmatrix} a & b \\ 49c & d \end{pmatrix}=\mathrm{sgn}'\sigma$$

予想
$F(z)\in S_2(\Gamma_0(49))$ をとり，$f_3=\dfrac{F(z)}{f_2}$ とおくと, $f_3\in S_1(\Gamma_0(49),\chi^5)$ であり， 次が成立する．

$$\begin{array}{rcl}
\dim S_1(\Gamma_0(49),\chi) & \geq & 1 \\
\dim S_1(\Gamma_0(49),\chi^2) & = & 0 \\
\dim S_1(\Gamma_0(49),\chi^3) & = & (\text{不明}) \\
\dim S_1(\Gamma_0(49),\chi^4) & = & 0 \\
\dim S_1(\Gamma_0(49),\chi^5) & = & 1 \\
\dim S_1(\Gamma_0(49),\chi^6) & = & 0 \\
\dim S_1(\Gamma_0(49),\chi^7) & = & 1 \\
\dim S_1(\Gamma_0(49),\chi^8) & = & 0 \\
\dim S_1(\Gamma_0(49),\chi^9) & = & (\text{不明}) \\
\dim S_1(\Gamma_0(49),\chi^{10}) & = & 0 \\
\dim S_1(\Gamma_0(49),\chi^{11}) & = & 0
\end{array}$$

注 . 13
これらの予想についても，本論文最後の計算結果から，正しいように思われる．

以上で，$S_1(\Gamma_0(N),\chi^*)$ の次元が確定した．以下にまとめておく．

定理 5.8.3 (**主結果**)
η 関数を用いて，$S_1(\Gamma_0(N), \chi^*)$ の次元が以下のように決まった．

lebel N	11,27,20,32,36	15	17	19	14	24	21	49
χ の位数	2	6	4	6	8	12	12	12
dim $S_1(\Gamma_0(N))$	0	0	0	0	0	0	0	0
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^1)$	1	1	≥ 1	≥ 1	1	1	≥ 1	≥ 1
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^2)$		0	0	0	0	0	0	0
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^3)$		0	≤ 1	≤ 1	1	1	??	??
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^4)$		0		0	0	0	0	0
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^5)$		1		≤ 1	1	1	≤ 1	≤ 1
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^6)$					0	0	0	0
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^7)$					1	1	≥ 1	≥ 1
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^8)$						0	0	0
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^9)$						1	??	??
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^{10})$						0	0	0
dim $S_1(\Gamma_0(N), \chi^{11})$						1	≤ 1	0

注 . 14
上の表を見ると，$N = 11, 27, 20, 32, 36, 14, 15, 24$ の場合に，次元が確定していることがわかる．これらは weight 2 の cusp form が η 関数の 4 つの積で表すことのできる level N の場合である．

途中，予想として提示した部分についてまとめておく．

予想
上記の表において，dim $S_1(\Gamma_0(19), \chi^3)$ と dim $S_1(\Gamma_0(49), \chi)$ 以外の不等号はすべて等号になると予想される．その結果，不明に終わっていた，$N = 21, 49$ の場合の χ^3, χ^9 についても，$N = 24$ の場合と同じように，χ, χ^{11} を用いて，χ^3, χ^9 が構成できると考えられるが，cusp form になるかどうかについては不明である．

6 $S_1(\mathbf{ker}\chi)$ の次元について

$S_1(\Gamma_0(N), \chi)$ の次元が決定したので，引き続いて，$S_1(\ker\chi)$ の次元について考察する．
まず，次の命題が成立する．

命題 6.0.4
$\Gamma_0(N)$ に関する指標を χ とするとき，

$$S_1(\ker\chi) = \bigoplus_n S_1(\Gamma_0(N), \chi^n)$$

したがって，

$$\dim\, S_1(\ker\chi) = \sum_n \dim\, S_1(\Gamma_0(N), \chi^n)$$

が成立する．

命題 6.0.5

$$S_1(\Gamma_0(N),\chi)=A_1(\Gamma_0(N),\chi)\cap S_1(\mathrm{ker}\chi)$$

が成立する．

前章で $\dim S_1(\Gamma_0(N),\chi)$ が部分的に決定した．しかしあくまでも部分的であるため，$\mathrm{dim}S_1(\mathrm{ker}\chi)$ を完全に決定することはできない．ここでは，前章で「予想」という形で述べた事項を基にして，再び「予想」を提示する．

予想

$\dim S_1(\mathrm{ker}\chi)$ について，次のことが予想される．

lebel N	11,27,20,32,36	15	17	19	14	24	21	49
χ の位数	2	6	4	6	8	12	12	12
$\dim S_1(\mathrm{ker}\chi)$	1	2	2	≤ 3	4	6	≥ 4	≥ 3

7 Hecke Operator について

この章では，Atkin-Lehner:[1], Deligne & Serre:[9], Serre:[10] に従い，Hecke Operator について簡単に説明する．

まず，mod$N$ で定まる Dirichlet 指標を ϵ とする．つまり，ϵ は，

$$\epsilon:(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times\longmapsto\mathbb{C}^\times$$

への準同型である．特に，$\epsilon(-1)=(-1)^k$ と定めておく (k は weight である)．

$\gamma=\begin{pmatrix}a & b\\ Nc & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$ に対して，

$$\epsilon(\gamma)=\epsilon(d)$$

と定義する．ϵ は $\Gamma_0(N)$ から $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ への準同型で，$\mathrm{Ker}(\epsilon)=\Gamma_1(N)$ であるので，ϵ は $\Gamma_0(N)$ の指標である．

このとき，Hecke Operator を次のように定義する．

定義 7.0.6

p,q を素数，$f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nq^n\in A_k(\Gamma_0(N),\epsilon)$ とする．$q=e(z)$ である．このとき，Hecke Operator $T_p\ (p\nmid N), U_p\ (p\mid N)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} f|T_p &= \sum_{n=0}^{\infty}a_{np}q^n+\epsilon(p)\ p^{k-1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nq^{np} \quad (p\nmid N)\\ f|U_p &= \sum_{n=0}^{\infty}a_{np}q^n \qquad (p\mid N)\end{aligned}$$

また，次の補題が成立する．

補題 7.0.7

$$f \in A_k(\Gamma_0(N), \epsilon) \Longrightarrow f|T_p,\ f|U_p \in A_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$$
$$f \in S_k(\Gamma_0(N), \epsilon) \Longrightarrow f|T_p,\ f|U_p \in S_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$$

証明
Atkin-Lehner[1] 参照のこと． □

$N'|N$, $N = dN'$ とする．ϵ を modN' で定まる Dirichlet 指標とする．このとき，

$$f(z) \in S_k(\Gamma_0(N'), \epsilon) \longmapsto f(dz) \in S_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$$

が成立する．

N の約数 N'(ただし $N \neq N'$) から以上の方法で得られる $\Gamma_0(N)$ に関する form は，$S_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$ の部分空間 $S_k^-(\Gamma_0(N), \epsilon)$ を張る．つまり，

$$S_k(\Gamma_0(N), \epsilon) = S_k^-(\Gamma_0(N), \epsilon) \oplus S_k^+(\Gamma_0(N), \epsilon)$$

と分割される．これらの部分空間は，Hecke operator の作用で固定される．空間 $S_k^+(\Gamma_0(N), \epsilon)$ を張る保型形式を newform という．Newform $f = \sum a_n q^n$ は 0 でない cusp form である．また，$a_1 = 1$ である newform を normalised された newform と呼ぶ．

さて，以上のように定義した Hecke operator T_p, U_p を，今回，我々が考えている η 関数の積の，それも特に weight1 の場合に適用したいのであるが，そのためには，次のような問題点が考えられる．

問題点 1　我々が考えている η 関数 2 つの積の指標 χ は，mod N で定まる Dirichlet 指標ではない．したがって，Dirichlet 指標の場合に適用できた，その他の命題が，全く通用しない状況にある．

問題点 2　もし仮に問題 1 が解消し operator を適用できたとしても，$S_1(\Gamma_0(N), \chi)$ の元は $q = e(z)$ のベキ級数では表すことができない (すべて q の分数ベキ)．

以上の問題点を解消しない限り，η 関数の積に Hecke operator T_p, U_p を適用することは，nonsence なことではあるが，次のように考えて，Hecke operator を適用してみることにした．

解決方法 1　$\Gamma_0(N)$ の部分空間 kerχ で考察する．しかしこの場合，Hecke operator の作用で空間がどのように変化し，さらに，もとの空間とどのような関係にあるのか，については詳細は不明である．

解決方法 2　$\eta(mz)\eta(nz)$ に対して，$d_0 = \dfrac{24}{\gcd(m+n, 24)}$ とおくと，$q = e(z)$ で展開したときの，指数の分母が d_0 である．よって，T_p の代わりに，

$$T_p{}' = \begin{pmatrix} d_0 & 0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix}^{-1} T_p \begin{pmatrix} d_0 & 0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix}$$

を考える (作用の順番は右から)．U_p についても同様．

しかし，このように考えたとしても，まだまだ理論的にあいまいな点は数多いわけだが，とりあえず数式処理ソフト $Mathematica$ で計算してみたところ，いくつかの興味深い観察結果が得られたので，それらを報告する．

解決方法 2 で定義した，$T_p{}'$ を，あらためて T_p で表すことにする．

まず，次の予想を得た．

予想

$f_1 = \eta(z)\eta(14z)$，$f_2 = \eta(2z)\eta(7z)$ のとき，

$$\begin{aligned} \frac{{f_1}^2}{f_2} &= -f_1|T_3 \\ \frac{{f_2}^2}{f_1} &= f_2|T_3 \end{aligned}$$

が成立している．

また，$\dfrac{{f_1}^2}{f_2} \in S_1(\Gamma_0(14), \chi^3)$，$\dfrac{{f_2}^2}{f_1} \in S_1(\Gamma_0(14), \chi^5)$ であったので，

$$\begin{aligned} -f_1|T_3 &\in S_1(\Gamma_0(14), \chi^3) \\ f_2|T_3 &\in S_1(\Gamma_0(14), \chi^5) \end{aligned}$$

であることが分かる．

予想

$f_1 = \eta(2z)\eta(12z)$，$f_2 = \eta(4z)\eta(6z)$ のとき，

$$\begin{aligned} \frac{{f_1}^3}{{f_2}^2} &= -f_1|T_5 \\ \frac{{f_2}^3}{{f_1}^2} &= f_2|T_5 \end{aligned}$$

が成立している．

また，$\dfrac{{f_1}^3}{{f_2}^2} \in S_1(\Gamma_0(24), \chi^5)$，$\dfrac{{f_2}^3}{{f_1}^2} \in S_1(\Gamma_0(24), \chi^7)$ であったので，

$$\begin{aligned} -f_1|T_5 &\in S_1(\Gamma_0(24), {\chi_1}^5) \\ f_2|T_5 &\in S_1(\Gamma_0(24), {\chi_1}^7) \end{aligned}$$

であることが分かる．

8　計算結果

この章では，数式処理ソフト $Mathematica$ による計算結果を述べる．したがって，証明は無く，あくまでも計算結果の観察報告にすぎない．

8.1 weight 1 の Hecke eigenform について

この章では，各 level N における Hecke eigenform を調べることを目標とする．そのために，$\eta(nz)\eta(mz)$, $(mn = N)$ なる η 関数の積を Hecke perator T_p, U_p で変換したときの様子を観察した．なお，本論中では扱わなかった組み合わせについても計算している．

次章でふれるように，weight 1 の Hecke eigenform の構成は，weight 2 の cusp form の構成に深く関係していることが予想される．

まず，前章で定義した Hecke operator T_p で，$k = 1$ とし，さらに次のように符号 sign p を付加し再定義する．

定義 8.1.1
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ とする．素数 p に対して operator T_p を次のように定義する．

$$f|T_p = \sum_{n=0}^{\infty} a_{np} q^n + \mathrm{sign}(p) \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{np} \quad (p \nmid N)$$

ここで，sign(p) は，$-1, 0, +1$ のいずれかの値をとるものとする．特に，sign$(p) = 0$ なる p に対して，$T_p = U_p$ と書くことにする．

注 . 15
前述したように，これから考えていく $f(z)$ は，$f(z) \in S_1(\ker\chi)$ であり，さらに，$q = e(z)$ で展開したときの分数指数の分母 d_0 に対して，

$$T_p{}' = \begin{pmatrix} d_0 & 0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix}^{-1} T_p \begin{pmatrix} d_0 & 0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix}$$

なる，$T_p{}'$ を新たに T_p と考えるのであった．

まず，U_p を定める p については，以下の表のように，Level$N$ の素因数と η 関数の積を $q = e(z)$ で展開したとき分数指数の分母 d_0 の約数とする．

以下に，l と U_p をまとめておく．

N	$\eta(mz)\eta(nz)$	d_0	U_p
11	$\eta(z)\eta(11z)$	2	2,11
27	$\eta(3z)\eta(9z)$	2	2,3
20	$\eta(2z)\eta(10z)$	2	2,5
32	$\eta(4z)\eta(8z)$	2	2
36	$\eta(6z)^2$	2	2,3
15	$\eta(z)\eta(15z), \eta(3z)\eta(5z)$	3	3,5
17	$\eta(z)\eta(17z)$	4	2,17
19	$\eta(z)\eta(19z)$	6	2,3,19
14	$\eta(z)\eta(14z), \eta(2z)\eta(7z)$	8	2,7
24	$\eta(2z)\eta(12z), \eta(4z)\eta(6z)$	12	2,3
21	$\eta(z)\eta(21z), \eta(3z)\eta(7z)$	12	2,3,7
49	$\eta(z)\eta(49z), \eta(7z)^2$	12	2,3,7

また，U_p を定める p 以外の素数に対しては，$\mathrm{sign}(p)$ は平方剰余記号で定義する．すなわち，

$$\mathrm{sign}(p) = \left(\frac{m}{p}\right)$$

これは，$\mathrm{mod} N$ で定まる Dirichlet 指標である．

以上のように，$\mathrm{sign}(p)$ を定義し，T_p, U_p による変換を行った．

100 以下の素数に対しての結果を以下にまとめておく．

なお，計算結果より

$$\mathrm{sign}(p) = -1 \Longrightarrow f|T_p = 0$$

となっていることに気づく．

- N=11

  $f_1 = \eta(z)\eta(11z)$

T_p	T_2	T_3	T_5	T_7	U_{11}	T_{13}	T_{17}	T_{19}	T_{23}	T_{29}	T_{31}	T_{37}	T_{41}
$f_1\|T_p$	0	$-f_1$	$-f_1$	0	f_1	0	0	0	$-f_1$	0	$-f_1$	$-f_1$	0
sign	0	$+1$	$+1$	-1	0	-1	-1	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1

T_p	T_{43}	T_{47}	T_{53}	T_{59}	T_{61}	T_{67}	T_{71}	T_{73}	T_{79}	T_{83}	T_{89}	T_{97}
$f_1\|T_p$	0	$2f_1$	$2f_1$	$-f_1$	0	$-f_1$	$-f_1$	0	0	0	$-f_1$	$-f_1$
sign	-1	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$

  したがって，$\dim< f_1, f_1|T_p >_{\mathbb{C}} = \dim < f_1 >_{\mathbb{C}} = 1$

- N=27

  $f_1 = \eta(3z)\eta(9z)$

T_p	T_2	U_3	T_5	T_7	T_{11}	T_{13}	T_{17}	T_{19}	T_{23}	T_{29}	T_{31}	T_{37}	T_{41}
$f_1\|T_p$	0	0	0	$-f_1$	0	$-f_1$	0	$-f_1$	0	0	$2f_1$	$-f_1$	0
sign	0	0	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$	-1

T_p	T_{43}	T_{47}	T_{53}	T_{59}	T_{61}	T_{67}	T_{71}	T_{73}	T_{79}	T_{83}	T_{89}	T_{97}
$f_1\|T_p$	$2f_1$	0	0	0	$-f_1$	$-f_1$	0	$-f_1$	$-f_1$	0	0	$-f_1$
sign	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$

  したがって，$\dim< f_1, f_1|T_p >_{\mathbb{C}} = \dim < f_1 >_{\mathbb{C}} = 1$

- N=20

  $f_1 = \eta(2z)\eta(10z)$

T_p	U_2	T_3	U_5	T_7	T_{11}	T_{13}	T_{17}	T_{19}	T_{23}	T_{29}	T_{31}	T_{37}	T_{41}
$f_1\|T_p$	0	0	$-f_1$	0	0	0	0	0	0	$2f_1$	0	0	$-2f_1$
sign	0	$+1$	0	$+1$	-1	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$

T_p	T_{43}	T_{47}	T_{53}	T_{59}	T_{61}	T_{67}	T_{71}	T_{73}	T_{79}	T_{83}	T_{89}	T_{97}
$f_1\|T_p$	0	0	0	0	$-2f_1$	0	0	0	0	0	$2f_1$	0
sign	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	-1

  したがって，$\dim< f_1, f_1|T_p >_{\mathbb{C}} = \dim < f_1 >_{\mathbb{C}} = 1$

$g_1 = \eta(z)\eta(20z)$, $g_2 = \eta(4z)\eta(5z)$

T_p	U_2	T_3	U_5	T_7	T_{11}	T_{13}	T_{17}	T_{19}	T_{23}	T_{29}	T_{31}	T_{37}	T_{41}
$g_1\|T_p$	0	g_3	$-g_2$	g_4	0	0	0	0	$-g_4$	0	0	0	0
$g_2\|T_p$	0	g_4	$-g_1$	g_3	0	0	0	0	$-g_3$	0	0	0	0
$g_3\|T_p$	0	$2g_1$	$-g_4$	$2g_2$	0	0	0	0	$-2g_2$	0	0	0	0
$g_4\|T_p$	0	$2g_2$	$-g_3$	$2g_1$	0	0	0	0	$-2g_1$	0	0	0	0
sign	0	$+1$	0	$+1$	-1	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$

T_p	T_{43}	T_{47}	T_{53}	T_{59}	T_{61}	T_{67}	T_{71}	T_{73}	T_{79}	T_{83}	T_{89}	T_{97}
$g_1\|T_p$	$-g_3$	g_4	0	0	$2g_2$	$-g_3$	0	0	0	$-g_3$	$-2g_1$	0
$g_2\|T_p$	$-g_4$	g_3	0	0	$2g_1$	$-g_4$	0	0	0	$-g_4$	$-2g_2$	0
$g_3\|T_p$	$-2g_1$	$2g_2$	0	0	$2g_4$	$-2g_1$	0	0	0	$-2g_1$	$-2g_3$	0
$g_4\|T_p$	$-g_2$	$2g_1$	0	0	$2g_3$	$-2g_2$	0	0	0	$-g_2$	$-2g_4$	0
sign	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	-1

したがって，dim$< g_1, g_1|T_p >_{\mathbb{C}} = \dim < g_1, g_2, g_1|T_3, g_2|T_3 >_{\mathbb{C}} = 4$

- N=32

$f_1 = \eta(4z)\eta(8z)$

T_p	U_2	T_3	T_5	T_7	T_{11}	T_{13}	T_{17}	T_{19}	T_{23}	T_{29}	T_{31}	T_{37}	T_{41}
$f_1\|T_p$	0	0	0	0	0	0	$-2f_1$	0	0	0	0	0	$2f_1$
sign	0	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	-1	-1	$+1$

T_p	T_{43}	T_{47}	T_{53}	T_{59}	T_{61}	T_{67}	T_{71}	T_{73}	T_{79}	T_{83}	T_{89}	T_{97}
$f_1\|T_p$	0	0	0	0	0	0	0	$-2f_1$	0	0	$-2f_1$	$-2f_1$
sign	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	$+1$

したがって，dim$< f_1, f_1|T_p >_{\mathbb{C}} = \dim < f_1 >_{\mathbb{C}} = 1$

$g_1 = \eta(2z)\eta(16z)$

T_p	U_2	T_3	T_5	T_7	T_{11}	T_{13}	T_{17}	T_{19}	T_{23}	T_{29}	T_{31}	T_{37}	T_{41}
$g_1\|T_p$	0	g_2	0	0	$-g_2$	0	0	$-g_2$	0	0	0	0	$-2g_1$
$g_2\|T_p$	0	$2g_1$	0	0	$-2g_1$	0	0	$-2g_1$	0	0	0	0	$-2g_2$
sign	0	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	-1	-1	$+1$

T_p	T_{43}	T_{47}	T_{53}	T_{59}	T_{61}	T_{67}	T_{71}	T_{73}	T_{79}	T_{83}	T_{89}	T_{97}
$g_1\|T_p$	g_2	0	0	g_2	0	$-g_2$	0	0	0	g_2	0	0
$g_2\|T_p$	$2g_1$	0	0	$2g_1$	0	$-2g_1$	0	0	0	$2g_1$	0	0
sign	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	$+1$

したがって，dim$< g_1, g_1|T_p >_{\mathbb{C}} = \dim < g_1, g_1|T_3 >_{\mathbb{C}} = 2$

- N=36

  $f_1 = \eta(6z)^2$

T_p	U_2	U_3	T_5	T_7	T_{11}	T_{13}	T_{17}	T_{19}	T_{23}	T_{29}	T_{31}	T_{37}	T_{41}
$f_1\|T_p$	0	0	0	0	0	$-2f_1$	0	0	0	0	0	$2f_1$	0
sign	0	0	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$

T_p	T_{43}	T_{47}	T_{53}	T_{59}	T_{61}	T_{67}	T_{71}	T_{73}	T_{79}	T_{83}	T_{89}	T_{97}
$f_1\|T_p$	0	0	0	0	$2f_1$	0	0	$-2f_1$	0	0	0	$-2f_1$
sign	-1	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$

  したがって，$\dim < f_1, f_1|T_p >_{\mathbb{C}} = \dim < f_1 >_{\mathbb{C}} = 1$

  $g_1 = \eta(2z)\eta(18z)$

T_p	U_2	U_3	T_5	T_7	T_{11}	T_{13}	T_{17}	T_{19}	T_{23}	T_{29}	T_{31}	T_{37}	T_{41}
$g_1\|T_p$	0	0	g_2	0	0	g_1	$-g_2$	0	0	$-g_2$	0	$-g_1$	0
$g_2\|T_p$	0	0	$3g_1$	0	0	g_2	$-3g_1$	0	0	$-3g_1$	0	$-g_2$	0
sign	0	0	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$

T_p	T_{43}	T_{47}	T_{53}	T_{59}	T_{61}	T_{67}	T_{71}	T_{73}	T_{79}	T_{83}	T_{89}	T_{97}
$g_1\|T_p$	0	0	0	0	$-g_1$	0	0	g_1	0	0	g_2	$-2g_1$
$g_2\|T_p$	0	0	0	0	$-g_2$	0	0	g_2	0	0	$3g_1$	$-2g_2$
sign	-1	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$

  したがって，$\dim < g_1, g_1|T_p >_{\mathbb{C}} = \dim < g_1, g_1|T_5 >_{\mathbb{C}} = 2$

- N=15

  $f_1 = \eta(z)\eta(15z)$,　$f_2 = \eta(3z)\eta(5z)$

T_p	T_2	U_3	U_5	T_7	T_{11}	T_{13}	T_{17}	T_{19}	T_{23}	T_{29}	T_{31}	T_{37}	T_{41}
$f_1\|T_p$	f_2	0	$-f_2$	0	0	0	f_2	$-f_1$	f_2	0	$-f_1$	0	0
$f_2\|T_p$	f_1	0	$-f_1$	0	0	0	f_1	$-f_2$	f_1	0	$-f_2$	0	0
sign	$+1$	0	0	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	-1

T_p	T_{43}	T_{47}	T_{53}	T_{59}	T_{61}	T_{67}	T_{71}	T_{73}	T_{79}	T_{83}	T_{89}	T_{97}
$f_1\|T_p$	0	$-2f_1$	f_2	0	$-f_1$	0	0	0	$-f_1$	f_2	0	0
$f_2\|T_p$	0	$-2f_2$	f_1	0	$-f_2$	0	0	0	$-f_2$	f_1	0	0
sign	-1	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	-1

  したがって，$\dim < f_1, f_1|T_p >_{\mathbb{C}} = \dim < f_1, f_1|T_2 >_{\mathbb{C}} = 2$

- N=17

  $f_1 = \eta(z)\eta(17z)$

T_p	T_2	T_3	T_5	T_7	T_{11}	T_{13}	U_{17}	T_{19}	T_{23}	T_{29}	T_{31}	T_{37}	T_{41}
$f_1\|T_p$	0	f_2	0	$-f_2$	$-f_2$	0	$-f_1$	0	f_2	0	f_2	0	0
$f_2\|T_p$	0	$2f_1$	0	$-2f_1$	$-2f_1$	0	$-f_2$	0	$2f_1$	0	$2f_1$	0	0
sign	0	$+1$	-1	$+1$	$+1$	$+1$	0	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	-1

T_p	T_{43}	T_{47}	T_{53}	T_{59}	T_{61}	T_{67}	T_{71}	T_{73}	T_{79}	T_{83}	T_{89}	T_{97}
$f_1\|T_p$	0	0	$-2f_1$	0	0	0	$-f_2$	0	f_2	0	0	0
$f_2\|T_p$	0	0	$-2f_2$	0	0	0	$-2f_1$	0	$2f_1$	0	0	0
sign	-1	-1	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1

したがって，$\dim< f_1, f_1|T_p >_{\mathbb{C}} = \dim < f_1, f_1|T_3 >_{\mathbb{C}} = 2$

- N=19

  $f_1 = \eta(z)\eta(19z)$

T_p	T_2	T_3	T_5	T_7	T_{11}	T_{13}	T_{17}	U_{19}	T_{23}	T_{29}	T_{31}	T_{37}	T_{41}
$f_1\|T_p$	0	0	f_2	f_1	$-f_2$	0	$-f_2$	$-f_1$	0	0	0	0	0
$f_2\|T_p$	0	0	$3f_1$	f_2	$-3f_1$	0	$-3f_1$	$-f_2$	0	0	0	0	0
sign	0	0	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	0	$+1$	-1	-1	-1	-1

T_p	T_{43}	T_{47}	T_{53}	T_{59}	T_{61}	T_{67}	T_{71}	T_{73}	T_{79}	T_{83}	T_{89}	T_{97}
$f_1\|T_p$	$-f_1$	f_2	0	0	f_1	0	0	$-f_1$	0	0	0	0
$f_2\|T_p$	$-f_2$	$3f_1$	0	0	f_2	0	0	$-f_2$	0	0	0	0
sign	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	-1

したがって，$\dim< f_1, f_1|T_p >_{\mathbb{C}} = \dim < f_1, f_1|T_5 >_{\mathbb{C}} = 2$

- N=14

  $f_1 = \eta(z)\eta(14z), \quad f_2 = \eta(2z)\eta(7z)$

T_p	U_2	T_3	T_5	U_7	T_{11}	T_{13}	T_{17}	T_{19}	T_{23}	T_{29}	T_{31}	T_{37}	T_{41}
$f_1\|T_p$	0	f_3	f_4	$-f_2$	0	$-f_4$	0	$-f_3$	0	0	0	0	0
$f_2\|T_p$	0	f_4	f_3	$-f_1$	0	$-f_3$	0	$-f_4$	0	0	0	0	0
$f_3\|T_p$	0	$2f_1$	$2f_2$	$-f_4$	0	$-2f_1$	0	$-2f_1$	0	0	0	0	0
$f_4\|T_p$	0	$2f_2$	$2f_1$	$-f_3$	0	$-2f_1$	0	$-2f_2$	0	0	0	0	0
sign	0	$+1$	$+1$	0	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	-1	-1

T_p	T_{43}	T_{47}	T_{53}	T_{59}	T_{61}	T_{67}	T_{71}	T_{73}	T_{79}	T_{83}	T_{89}	T_{97}
$f_1\|T_p$	0	0	0	$-f_3$	f_4	0	$2f_2$	0	$2f_2$	f_3	0	0
$f_2\|T_p$	0	0	0	$-f_4$	f_3	0	$2f_1$	0	$2f_1$	f_4	0	0
$f_3\|T_p$	0	0	0	$-2f_1$	$2f_2$	0	$2f_4$	0	$2f_4$	$2f_1$	0	0
$f_4\|T_p$	0	0	0	$-2f_2$	$2f_1$	0	$2f_3$	0	$2f_3$	$2f_2$	0	0
sign	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	-1

したがって，$\dim< f_1, f_1|T_p >_{\mathbb{C}} = \dim < f_1, f_2, f_1|T_3, f_2|T_3 >_{\mathbb{C}} = 4$

- N=24

$f_1 = \eta(2z)\eta(12z), \quad f_2 = \eta(4z)\eta(6z)$

T_p	U_2	U_3	T_5	T_7	T_{11}	T_{13}	T_{17}	T_{19}	T_{23}	T_{29}	T_{31}	T_{37}	T_{41}
$f_1\|T_p$	0	0	f_3	f_4	$-f_2$	0	0	0	0	0	$-f_4$	0	0
$f_2\|T_p$	0	0	f_4	f_3	$-f_1$	0	0	0	0	0	$-f_3$	0	0
$f_3\|T_p$	0	0	$3f_1$	$3f_2$	$-f_4$	0	0	0	0	0	$-3f_2$	0	0
$f_4\|T_p$	0	0	$3f_2$	$3f_1$	$-f_3$	0	0	0	0	0	$-3f_1$	0	0
sign	0	0	$+1$	$+1$	$+1$	-1	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	-1

T_p	T_{43}	T_{47}	T_{53}	T_{59}	T_{61}	T_{67}	T_{71}	T_{73}	T_{79}	T_{83}	T_{89}	T_{97}
$f_1\|T_p$	0	0	$-f_3$	$-2f_2$	0	0	0	f_1	0	$-f_2$	0	$-f_1$
$f_2\|T_p$	0	0	$-f_4$	$-2f_1$	0	0	0	f_2	0	$-f_1$	0	$-f_2$
$f_3\|T_p$	0	0	$-3f_1$	$-2f_4$	0	0	0	f_3	0	$-f_4$	0	$-f_3$
$f_4\|T_p$	0	0	$-3f_2$	$-2f_3$	0	0	0	f_4	0	$-f_3$	0	$-f_4$
sign	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$

したがって，dim$< f_1, f_1|T_p >_{\mathbb{C}} = \dim < f_1, f_2, f_1|T_5, f_1|T_5 >_{\mathbb{C}} = 4$

- N=21

$f_1 = \eta(z)\eta(21z), f_2 = \eta(3z)\eta(7z)$

T_p	T_2	U_3	T_5	U_7	T_{11}	T_{13}	T_{17}	T_{19}	T_{23}	T_{29}	T_{31}	T_{37}	T_{41}
$f_1\|T_p$	0	0	f_3	$-f_2$	f_4	0	0	f_2	$-f_4$	0	$-f_2$	f_1	$-f_3$
$f_2\|T_p$	0	0	f_4	$-f_1$	f_3	0	0	f_1	$-f_3$	0	$-f_1$	f_2	$-f_4$
$f_3\|T_p$	0	0	$3f_1$	$-f_4$	$3f_2$	0	0	f_4	$-3f_2$	0	$-f_4$	f_3	$-3f_1$
$f_4\|T_p$	0	0	$3f_2$	$-f_3$	$3f_1$	0	0	f_3	$-3f_1$	0	$-f_3$	f_4	$-3f_2$
sign	0	0	$+1$	0	$+1$	-1	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	$+1$	$+1$

T_p	T_{43}	T_{47}	T_{53}	T_{59}	T_{61}	T_{67}	T_{71}	T_{73}	T_{79}	T_{83}	T_{89}	T_{97}
$f_1\|T_p$	0	0	0	0	0	0	f_4	0	0	0	$-f_3$	0
$f_2\|T_p$	0	0	0	0	0	0	f_3	0	0	0	$-f_4$	0
$f_3\|T_p$	0	0	0	0	0	0	$3f_2$	0	0	0	$-3f_1$	0
$f_4\|T_p$	0	0	0	0	0	0	$3f_1$	0	0	0	$-3f_2$	0
sign	-1	-1	-1	-1	-1	-1	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	-1

したがって，dim$< f_1, f_1|T_p >_{\mathbb{C}} = \dim < f_1, f_2, f_1|T_5, f_1|T_5 >_{\mathbb{C}} = 4$

- N=49

  $f_1=\eta(z)\eta(49z), f_4=\eta(7z)^2=-f_1|T_7$

T_p	T_2	T_3	T_5	U_7	T_{11}	T_{13}	T_{17}	T_{19}	T_{23}	T_{29}	T_{31}	T_{37}	T_{41}
$f_1\|T_p$	0	0	f_2	$-f_4$	0	f_5	f_2	0	0	0	0	$2f_1-f_3$	$-f_2$
$f_2\|T_p$	0	0	f_3	0	0	0	f_3	0	0	0	0	$-2f_2$	$-f_3$
$f_3\|T_p$	0	0	$4f_2$	0	0	0	$4f_2$	0	0	0	0	$-2f_3$	$-4f_2$
$f_4\|T_p$	0	0	0	f_6	0	$-2f_4$	0	0	0	0	0	$2f_4$	0
$f_5\|T_p$	0	0	0	$2f_4$	0	$4f_1-f_3$	0	0	0	0	0	$2f_5$	0
$f_6\|T_p$	0	0	0	f_4	0	$-2f_6$	0	0	0	0	0	$2f_6$	0
sign	0	0	$+1$	0	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$

T_p	T_{43}	T_{47}	T_{53}	T_{59}	T_{61}	T_{67}	T_{71}	T_{73}	T_{79}	T_{83}	T_{89}	T_{97}
$f_1\|T_p$	0	0	0	0	$-f_5$	0	0	f_5	0	0	$-f_2$	f_5
$f_2\|T_p$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-f_3$	0
$f_3\|T_p$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-4f_2$	0
$f_4\|T_p$	0	0	0	0	$2f_4$	0	0	$-2f_4$	0	0	0	$-2f_4$
$f_5\|T_p$	0	0	0	0	$-4f_1+f_3$	0	0	$4f_1-f_3$	0	0	0	$4f_1-f_3$
$f_6\|T_p$	0	0	0	0	f_6	0	0	$-2f_6$	0	0	0	$-2f_6$
sign	-1	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$

  したがって，$\dim< f_1, f_4, f_1|T_p, f_4|T_p >_{\mathbb{C}}= \dim < f_1, f_1|T_5, (f_1|T_5)|T_5, f_1|T_{13}, f_4, f_4|T_7 >_{\mathbb{C}}= 6$

8.2 weight 2 の cusp form

最後に，weight 2 の cusp form についての計算結果を掲載しておく．

ここでは，各 Level に対応する楕円曲線の $\mathbb{F}_p$ 有理点の個数を計算してみた．

η 関数の積と比較すると，素数次数の係数が多く一致していることがわかる．

単純に η 関数を 4 つ掛け合わせることでは weight2 の cusp form が作れなかった $N=17$, 19, 21, 49 の場合においても，Hecke eigenform を構成し，weight 1 の cusp form 2 つをうまくかけ合わせることで，構成できそうであることがわかる．

予想

$N=11$, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 24, 27, 32, 36, 49 の場合においては，$\Gamma_0(N)$ に weight 2 の cusp form は，weight 1 の cusp form と, それを Hecke operator で変換したものを 2 つ掛け合わせることで構成できると思われる．

なお，計算方法は次の命題に従った．

命題 8.2.1

楕円曲線 $Y^2=f(X)$ の $\mathbb{F}_p$ 有理点の個数 N_p は，

$$N_p = 1+\sum_{X=0}^{p-1}\left(\frac{f(X)}{p}\right)$$

で与えられる．この N_p に対して，a_p を

$$a_p = 1 + p - N_p$$

で定める．

- N=11

$y^2 + y = x^3 - x^2 - 10x - 20$

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
N_p	5	5	10	11	10	20	20	25	30	25	35	50	50	40	60	55	50	75
a_p	-1	1	-2	1	4	-2	0	-1	0	7	3	-8	-6	8	-6	5	12	-7

p	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139
N_p	75	70	90	90	75	105	100	120	90	100	105	120	150	145	130
a_p	-3	4	-10	-6	15	-7	2	-16	18	10	9	8	-18	-7	10

$(\eta(z)\eta(11z))^2$

$= q - 2q^2 - q^3 + 2q^4 + q^5 + 2q^6 - 2q^7 - 2q^9 - 2q^{10} + q^{11} - 2q^{12} + 4q^{13} + 4q^{14} - q^{15} - 4q^{16} - 2q^{17} + 4q^{18} + 2q^{20} + 2q^{21} - 2q^{22} - q^{23} - 4q^{25} - 8q^{26} + 5q^{27} - 4q^{28} + 2q^{30} + 7q^{31} + 8q^{32} - q^{33} + 4q^{34} - 2q^{35} - 4q^{36} + 3q^{37} - 4q^{39} - 8q^{41} - 4q^{42} - 6q^{43} + 2q^{44} - 2q^{45} + 2q^{46} + 8q^{47} + 4q^{48} - 3q^{49} + 8q^{50} + 2q^{51} + 8q^{52} - 6q^{53} - 10q^{54} + q^{55} + 5q^{59} - 2q^{60} + 12q^{61} - 14q^{62} + 4q^{63} - 8q^{64} + 4q^{65} + 2q^{66} - 7q^{67} - 4q^{68} + q^{69} + 4q^{70} - 3q^{71} + 4q^{73} - 6q^{74} + 4q^{75} - 2q^{77} + 8q^{78} - 10q^{79} - 4q^{80} + q^{81} + 16q^{82} - 6q^{83} + 4q^{84} - 2q^{85} + 12q^{86} + 15q^{89} + 4q^{90} - 8q^{91} - 2q^{92} - 7q^{93} - 16q^{94} - 8q^{96} - 7q^{97} + 6q^{98} - 2q^{99} - 8q^{100} + 2q^{101} - 4q^{102} - 16q^{103} + 2q^{105} + 12q^{106} + 18q^{107} + 10q^{108} + 10q^{109} - 2q^{110} - 3q^{111} + 8q^{112} + 9q^{113} - q^{115} - 8q^{117} - 10q^{118} + 4q^{119} + q^{121} - 24q^{122} + 8q^{123} + 14q^{124} - 9q^{125} - 8q^{126} + 8q^{127} + 6q^{129} - 8q^{130} - 18q^{131} - 2q^{132} + 14q^{134} + 5q^{135} - 7q^{137} - 2q^{138} + 10q^{139} - 4q^{140} - 8q^{141} + 6q^{142} + 4q^{143} + 8q^{144} - 8q^{146} + 3q^{147} + 6q^{148} - 10q^{149} + O[q]^{150}$

- N=27

$y^2 + y = x^3 - 7$

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
N_p	4	6	9	12	9	18	27	24	30	36	27	42	36	48	54	60	63	63
a_p	0	0	-1	0	5	0	-7	0	0	-4	11	0	8	0	0	0	-1	5

p	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139
N_p	72	81	63	84	90	117	102	117	108	108	114	108	132	138	117
a_p	0	-7	17	0	0	-19	0	-13	0	2	0	10	0	0	23

$(\eta(3z)\eta(9z))^2$

$= q - 2q^4 - q^7 + 5q^{13} + 4q^{16} - 7q^{19} - 5q^{25} + 2q^{28} - 4q^{31} + 11q^{37} + 8q^{43} - 6q^{49} - 10q^{52} - q^{61} - 8q^{64} + 5q^{67} - 7q^{73} + 14q^{76} + 17q^{79} - 5q^{91} - 19q^{97} + 10q^{100} - 13q^{103} + 2q^{109} - 4q^{112} - 11q^{121} + 8q^{124} + 20q^{127} + 7q^{133} + 23q^{139} - 22q^{148} + O[q]^{151}$

- N=20

$y^2 = x^3 + x^2 + 4x + 4$

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
N_p	6	7	6	12	12	24	24	18	24	36	36	36	54	54	60	48	60	66
a_p	-2	-1	2	0	2	-6	-4	6	6	-4	2	6	-10	-6	-6	12	2	2

p	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139
N_p	84	72	72	78	96	96	96	90	114	108	120	126	132	120	144
a_p	-12	2	8	6	-6	2	6	14	-6	2	-6	2	0	18	-4

$(\eta(2z)\eta(10z))^2$

$= q - 2q^3 - q^5 + 2q^7 + q^9 + 2q^{13} + 2q^{15} - 6q^{17} - 4q^{19} - 4q^{21} + 6q^{23} + q^{25} + 4q^{27} + 6q^{29} - 4q^{31} - 2q^{35} + 2q^{37} - 4q^{39} + 6q^{41} - 10q^{43} - q^{45} - 6q^{47} - 3q^{49} + 12q^{51} - 6q^{53} + 8q^{57} + 12q^{59} + 2q^{61} + 2q^{63} - 2q^{65} + 2q^{67} - 12q^{69} - 12q^{71} + 2q^{73} - 2q^{75} + 8q^{79} - 11q^{81} + 6q^{83} + 6q^{85} - 12q^{87} - 6q^{89} + 4q^{91} + 8q^{93} + 4q^{95} + 2q^{97} + 6q^{101} + 14q^{103} + 4q^{105} - 6q^{107} + 2q^{109} - 4q^{111} - 6q^{113} - 6q^{115} + 2q^{117} - 12q^{119} - 11q^{121} - 12q^{123} - q^{125} + 2q^{127} + 20q^{129} - 8q^{133} - 4q^{135} + 18q^{137} - 4q^{139} + 12q^{141} - 6q^{145} + 6q^{147} - 6q^{149} + O[q]^{151}$

- N=32

$y^2 = x^3 + 4x$

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
N_p	4	8	8	12	8	16	20	24	40	32	40	32	44	48	40	60	72	68
a_p	0	-2	0	0	6	2	0	0	-10	0	-2	10	0	0	14	0	-10	0

p	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139
N_p	72	80	80	84	80	80	104	104	108	104	128	128	132	160	140
a_p	0	-6	0	0	10	18	-2	0	0	6	-14	0	0	-22	0

$(\eta(4z)\eta(8z))^2$

$= q - 2q^5 - 3q^9 + 6q^{13} + 2q^{17} - q^{25} - 10q^{29} - 2q^{37} + 10q^{41} + 6q^{45} - 7q^{49} + 14q^{53} - 10q^{61} - 12q^{65} - 6q^{73} + 9q^{81} - 4q^{85} + 10q^{89} + 18q^{97} - 2q^{101} + 6q^{109} - 14q^{113} - 18q^{117} - 11q^{121} + 12q^{125} - 22q^{137} + 20q^{145} + 14q^{149} + O[q]^{151}$

- N=36

$y^2 = x^3 + 1$

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
N_p	4	6	12	12	12	18	12	24	30	36	48	42	36	48	54	60	48	84
a_p	0	0	-4	0	2	0	8	0	0	-4	-10	0	8	0	0	0	14	-16

p	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139
N_p	72	84	84	84	90	84	102	84	108	108	114	108	132	138	156
a_p	0	-10	-4	0	0	14	0	20	0	2	0	20	0	0	-16

$(\eta(6z))^4$

$= q - 4q^7 + 2q^{13} + 8q^{19} - 5q^{25} - 4q^{31} - 10q^{37} + 8q^{43} + 9q^{49} + 14q^{61} - 16q^{67} - 10q^{73} - 4q^{79} - 8q^{91} + 14q^{97} + 20q^{103} + 2q^{109} - 11q^{121} + 20q^{127} - 32q^{133} - 16q^{139} + O[q]^{151}$

- N=15

$y^2 + xy + y = x^3 + x^2 - 10x - 10$

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
N_p	5	5	8	16	16	16	16	24	32	32	48	32	40	40	64	64	64	56
a_p	-1	1	0	-4	-2	2	4	0	-2	0	-10	10	4	8	-10	-4	-2	12

p	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139
N_p	80	64	80	72	96	96	96	120	120	96	112	136	144	144	144
a_p	-8	10	0	12	-6	2	6	-16	-12	14	2	-8	-12	-6	-4

$\eta(z)\eta(3z)\eta(5z)\eta(15z) = \eta(z)\eta(3z)(\eta(z)\eta(3z)|T_2)$

$= q - q^2 - q^3 - q^4 + q^5 + q^6 + 3q^8 + q^9 - q^{10} - 4q^{11} + q^{12} - 2q^{13} - q^{15} - q^{16} + 2q^{17} - q^{18} + 4q^{19} - q^{20} + 4q^{22} - 3q^{24} + q^{25} + 2q^{26} - q^{27} - 2q^{29} + q^{30} - 5q^{32} + 4q^{33} - 2q^{34} - q^{36} - 10q^{37} - 4q^{38} + 2q^{39} + 3q^{40} + 10q^{41} + 4q^{43} + 4q^{44} + q^{45} + 8q^{47} + q^{48} - 7q^{49} - q^{50} - 2q^{51} + 2q^{52} - 10q^{53} + q^{54} - 4q^{55} - 4q^{57} + 2q^{58} - 4q^{59} + q^{60} - 2q^{61} + 7q^{64} - 2q^{65} - 4q^{66} + 12q^{67} - 2q^{68} - 8q^{71} + 3q^{72} + 10q^{73} + 10q^{74} - q^{75} - 4q^{76} - 2q^{78} - q^{80} + q^{81} - 10q^{82} + 12q^{83} + 2q^{85} - 4q^{86} + 2q^{87} - 12q^{88} - 6q^{89} - q^{90} - 8q^{94} + 4q^{95} + 5q^{96} + 2q^{97} + 7q^{98} - 4q^{99} - q^{100} + 6q^{101} + 2q^{102} - 16q^{103} - 6q^{104} + 10q^{106} - 12q^{107} + q^{108} + 14q^{109} + 4q^{110} + 10q^{111} + 2q^{113} + 4q^{114} + 2q^{116} - 2q^{117} + 4q^{118} - 3q^{120} + 5q^{121} + 2q^{122} - 10q^{123} + q^{125} - 8q^{127} + 3q^{128} - 4q^{129} + 2q^{130} - 12q^{131} - 4q^{132} - 12q^{134} - q^{135} + 6q^{136} - 6q^{137} - 4q^{139} - 8q^{141} + 8q^{142} + 8q^{143} - q^{144} - 2q^{145} - 10q^{146} + 7q^{147} + 10q^{148} + 22q^{149} + O[q]^{150}$

- N=17

$y^2 + xy + y = x^3 - x^2 - x - 14$

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
N_p	4	8	4	12	16	17	24	20	24	28	40	48	40	48	48	72	72	64
a_p	0	-2	4	0	-2	1	-4	4	6	4	-2	-6	4	0	6	-12	-10	4

p	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139
N_p	76	80	68	88	80	96	112	96	100	104	128	120	116	114	148
a_p	-4	-6	12	-4	10	2	-10	8	8	6	-14	8	16	-6	-8

$(\eta(z)\eta(17z))(\eta(z)\eta(17z)|T_3)$

$= q - q^2 - q^4 - 2q^5 + 4q^7 + 3q^8 - 3q^9 + 2q^{10} - 2q^{13} - 4q^{14} - q^{16} + q^{17} + 3q^{18} - 4q^{19} + 2q^{20} + 4q^{23} - q^{25} + 2q^{26} - 4q^{28} + 6q^{29} + 4q^{31} - 5q^{32} - q^{34} - 8q^{35} + 3q^{36} - 2q^{37} + 4q^{38} - 6q^{40} - 6q^{41} + 4q^{43} + 6q^{45} - 4q^{46} + 9q^{49} + q^{50} + 2q^{52} + 6q^{53} + 12q^{56} - 6q^{58} - 12q^{59} - 10q^{61} - 4q^{62} - 12q^{63} + 7q^{64} + 4q^{65} + 4q^{67} - q^{68} + 8q^{70} - 4q^{71} - 9q^{72} - 6q^{73} + 2q^{74} + 4q^{76} + 12q^{79} + 2q^{80} + 9q^{81} + 6q^{82} - 4q^{83} - 2q^{85} - 4q^{86} + 10q^{89} - 6q^{90} - 8q^{91} - 4q^{92} + 8q^{95} + 2q^{97} - 9q^{98} + q^{100} - 10q^{101} +$

$8q^{103}-6q^{104}-6q^{106}+8q^{107}+6q^{109}-4q^{112}-14q^{113}-8q^{115}-6q^{116}+6q^{117}+12q^{118}+4q^{119}-11q^{121}+10q^{122}-4q^{124}+12q^{125}+12q^{126}+8q^{127}+3q^{128}-4q^{130}+16q^{131}-16q^{133}-4q^{134}+3q^{136}-6q^{137}-8q^{139}+8q^{140}+4q^{142}+3q^{144}-12q^{145}+6q^{146}+2q^{148}-10q^{149}+O[q]^{150}$

- N=19

$y^2+y=x^3+x^2-9x-15$

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
N_p	6	3	9	9	18	21	19	24	24	36	36	48	45	51	42	66	63	72
a_p	-2	3	-1	3	-4	-3	1	0	6	-4	2	-6	-1	-3	12	-6	-1	-4

p	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139
N_p	66	81	72	72	78	90	96	90	126	126	108	126	147	141	153
a_p	6	-7	8	12	12	8	6	14	-18	-16	6	2	-15	-3	-13

$(\eta(z)\eta(19z))(\eta(z)\eta(19z)|T_5)$

$=q-2q^3-2q^4+3q^5-q^7+q^9+3q^{11}+4q^{12}-4q^{13}-6q^{15}+4q^{16}-3q^{17}+q^{19}-6q^{20}+2q^{21}+4q^{25}+4q^{27}+2q^{28}+6q^{29}-4q^{31}-6q^{33}-3q^{35}-2q^{36}+2q^{37}+8q^{39}-6q^{41}-q^{43}-6q^{44}+3q^{45}-3q^{47}-8q^{48}-6q^{49}+6q^{51}+8q^{52}+12q^{53}+9q^{55}-2q^{57}-6q^{59}+12q^{60}-q^{61}-q^{63}-8q^{64}-12q^{65}-4q^{67}+6q^{68}+6q^{71}-7q^{73}-8q^{75}-2q^{76}-3q^{77}+8q^{79}+12q^{80}-11q^{81}+12q^{83}-4q^{84}-9q^{85}-12q^{87}+12q^{89}+4q^{91}+8q^{93}+3q^{95}+8q^{97}+3q^{99}-8q^{100}+6q^{101}+14q^{103}+6q^{105}-18q^{107}-8q^{108}-16q^{109}-4q^{111}-4q^{112}+6q^{113}-12q^{116}-4q^{117}+3q^{119}-2q^{121}+12q^{123}+8q^{124}-3q^{125}+2q^{127}+2q^{129}-15q^{131}+12q^{132}-q^{133}+12q^{135}-3q^{137}-13q^{139}+6q^{140}+6q^{141}-12q^{143}+4q^{144}+18q^{145}+12q^{147}-4q^{148}+21q^{149}+O[q]^{150}$

- N=14

$y^2+xy+y=x^3+4x-6$

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
N_p	6	6	7	12	18	12	18	24	36	36	36	36	36	60	48	66	54	72
a_p	-2	0	1	0	-4	6	2	0	-6	-4	2	6	8	-12	6	-6	8	-4

p	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139
N_p	72	72	72	90	96	108	102	108	96	108	108	144	114	120	126
a_p	0	2	8	-6	-6	-10	0	-4	12	2	6	-16	18	18	14

$\eta(z)\eta(2z)\eta(7z)\eta(14z)=-(\eta(z)\eta(2z)|T_3)(\eta(7z)\eta(14z)|T_3)$

$=q-q^2-2q^3+q^4+2q^6+q^7-q^8+q^9-2q^{12}-4q^{13}-q^{14}+q^{16}+6q^{17}-q^{18}+2q^{19}-2q^{21}+2q^{24}-5q^{25}+4q^{26}+4q^{27}+q^{28}-6q^{29}-4q^{31}-q^{32}-6q^{34}+q^{36}+2q^{37}-2q^{38}+8q^{39}+6q^{41}+2q^{42}+8q^{43}-12q^{47}-2q^{48}+q^{49}+5q^{50}-12q^{51}-4q^{52}+6q^{53}-4q^{54}-q^{56}-4q^{57}+6q^{58}-6q^{59}+8q^{61}+4q^{62}+q^{63}+q^{64}-4q^{67}+6q^{68}-q^{72}+2q^{73}-2q^{74}+10q^{75}+2q^{76}-8q^{78}+8q^{79}-11q^{81}-6q^{82}-6q^{83}-2q^{84}-8q^{86}+12q^{87}-6q^{89}-4q^{91}+8q^{93}+12q^{94}+2q^{96}-10q^{97}-q^{98}-5q^{100}+12q^{102}-4q^{103}+4q^{104}-6q^{106}+12q^{107}+4q^{108}+2q^{109}-4q^{111}+q^{112}+6q^{113}+4q^{114}-6q^{116}-$

$4q^{117}+6q^{118}+6q^{119}-11q^{121}-8q^{122}-12q^{123}-4q^{124}-q^{126}-16q^{127}-q^{128}-16q^{129}+18q^{131}+2q^{133}+4q^{134}-6q^{136}+18q^{137}+14q^{139}+24q^{141}+q^{144}-2q^{146}-2q^{147}+2q^{148}-18q^{149}+O[q]^{150}$

- N=24

$y^2 = x^3 - x^2 - 4x + 4$

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
N_p	5	8	8	8	16	16	24	32	24	24	32	48	40	48	56	56	64	72
a_p	-1	-2	0	4	-2	-2	-4	-8	6	8	6	-6	4	0	-2	4	-2	-4

p	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139
N_p	64	64	88	88	96	96	120	88	120	112	96	136	136	144	152
a_p	8	10	-8	-4	-6	2	-18	16	-12	-2	18	-8	-4	-6	-12

$\eta(2z)\eta(4z)\eta(6z)\eta(12z) = -(\eta(2z)\eta(4z)|T_5)(\eta(6z)\eta(12z)|T_5)$

$= q-q^3-2q^5+q^9+4q^{11}-2q^{13}+2q^{15}+2q^{17}-4q^{19}-8q^{23}-q^{25}-q^{27}+6q^{29}+8q^{31}-4q^{33}+6q^{37}+2q^{39}-6q^{41}+4q^{43}-2q^{45}-7q^{49}-2q^{51}-2q^{53}-8q^{55}+4q^{57}+4q^{59}-2q^{61}+4q^{65}-4q^{67}+8q^{69}+8q^{71}+10q^{73}+q^{75}-8q^{79}+q^{81}-4q^{83}-4q^{85}-6q^{87}-6q^{89}-8q^{93}+8q^{95}+2q^{97}+4q^{99}-18q^{101}+16q^{103}-12q^{107}-2q^{109}-6q^{111}+18q^{113}+16q^{115}-2q^{117}+5q^{121}+6q^{123}+12q^{125}-8q^{127}-4q^{129}-4q^{131}+2q^{135}-6q^{137}-12q^{139}-8q^{143}-12q^{145}+7q^{147}+14q^{149}+O[q]^{151}$

- N=21

$y^2 + xy = x^3 - 4x - 1$

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
N_p	3	8	9	8	16	24	16	24	32	32	32	40	48	48	48	48	64	64
a_p	1	-2	-1	4	-2	-6	4	0	-2	0	6	2	-4	0	6	12	-2	4

p	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139
N_p	72	80	96	96	104	80	88	96	104	128	128	128	128	144	128
a_p	0	-6	-16	-12	-14	18	14	8	4	-18	-14	0	4	-6	12

$\eta(z)\eta(21z)(\eta(3z)\eta(7z)|T_5) = -(\eta(z)\eta(21z)|T_5)\eta(3z)\eta(7z)$

$= q-q^2+q^3-q^4-2q^5-q^6-q^7+3q^8+q^9+2q^{10}+4q^{11}-q^{12}-2q^{13}+q^{14}-2q^{15}-q^{16}-6q^{17}-q^{18}+4q^{19}+2q^{20}-q^{21}-4q^{22}+3q^{24}-q^{25}+2q^{26}+q^{27}+q^{28}-2q^{29}+2q^{30}-5q^{32}+4q^{33}+6q^{34}+2q^{35}-q^{36}+6q^{37}-4q^{38}-2q^{39}-6q^{40}+2q^{41}+q^{42}-4q^{43}-4q^{44}-2q^{45}-q^{48}+q^{49}+q^{50}-6q^{51}+2q^{52}+6q^{53}-q^{54}-8q^{55}-3q^{56}+4q^{57}+2q^{58}+12q^{59}+2q^{60}-2q^{61}-q^{63}+7q^{64}+4q^{65}-4q^{66}+4q^{67}+6q^{68}-2q^{70}+3q^{72}-6q^{73}-6q^{74}-q^{75}-4q^{76}-4q^{77}+2q^{78}-16q^{79}+2q^{80}+q^{81}-2q^{82}-12q^{83}+q^{84}+12q^{85}+4q^{86}-2q^{87}+12q^{88}-14q^{89}+2q^{90}+2q^{91}-8q^{95}-5q^{96}+18q^{97}-q^{98}+4q^{99}+q^{100}+14q^{101}+6q^{102}+8q^{103}-6q^{104}+2q^{105}-6q^{106}+4q^{107}-q^{108}-18q^{109}+8q^{110}+6q^{111}+q^{112}-14q^{113}-4q^{114}+2q^{116}-2q^{117}-12q^{118}+6q^{119}-6q^{120}+5q^{121}+2q^{122}+2q^{123}+12q^{125}+q^{126}+3q^{128}-4q^{129}-4q^{130}+4q^{131}-4q^{132}-4q^{133}-4q^{134}-2q^{135}-18q^{136}-6q^{137}+12q^{139}-2q^{140}-8q^{143}-q^{144}+4q^{145}+6q^{146}+q^{147}-6q^{148}+6q^{149}+q^{150}+O[q]^{151}$

- N=49

  $y^2+xy=x^3-x^2-2x-1$

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
N_p	4	6	8	8	14	18	20	16	28	32	44	42	56	48	64	60	62	64
a_p	0	0	0	4	0	0	0	8	2	0	-6	0	-12	0	-10	0	0	4

p	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139
N_p	56	74	72	84	90	98	102	104	128	92	112	112	132	148	140
a_p	16	0	8	0	0	0	0	0	-20	18	2	16	0	-10	0

$(\eta(z)\eta(49z)|T5)\eta(7z)^2$

$= q+q^2-q^4-3q^8-3q^9+4q^{11}-q^{16}-3q^{18}+4q^{22}+8q^{23}-5q^{25}+2q^{29}+5q^{32}+3q^{36}-6q^{37}-12q^{43}-4q^{44}+8q^{46}-5q^{50}-10q^{53}+2q^{58}+7q^{64}+4q^{67}+16q^{71}+9q^{72}-6q^{74}+8q^{79}+9q^{81}-12q^{86}-12q^{88}-8q^{92}-12q^{99}+5q^{100}-10q^{106}-20q^{107}+18q^{109}+2q^{113}-2q^{116}+5q^{121}+16q^{127}-3q^{128}+4q^{134}-10q^{137}+16q^{142}+3q^{144}+6q^{148}+22q^{149}+O[q]^{151}$

最後にこれまでの結果を表にまとめておく．なお表中の記号 $\pm$ は複号同順とする．

LevelN	eta products	weight1 の Hecke eigenform	weight2 の cuspform
11	$f_1 = \eta(z)\eta(11z)$	f_1	${f_1}^2$
27	$f_1 = \eta(3z)\eta(9z)$	f_1	${f_1}^2$
20	$f_1 = \eta(2z)\eta(10z)$	f_1	${f_1}^2$
32	$f_1 = \eta(4z)\eta(8z)$	f_1	${f_1}^2$
36	$f_1 = \eta(6z)^2$	f_1	${f_1}^2$
15	$f_1 = \eta(z)\eta(15z)$ $f_2 = \eta(3z)\eta(5z)$ $= f_1 \mid T_2$	$\pm f_1 + f_2$	$f_1 f_2$
17	$f_1 = \eta(z)\eta(17z)$ $f_2 = f_1 \mid T_3$	$\pm\sqrt{2} f_1 + f_2$	$f_1 f_2$
19	$f_1 = \eta(z)\eta(19)$ $f_2 = f_1 \mid T_5$	$\pm\sqrt{3} f_1 + f_2$	$f_1 f_2$
14	$f_1 = \eta(z)\eta(14z)$ $f_2 = \eta(2z)\eta(7z)$ $f_3 = f_1 \mid T_3$ $f_4 = f_2 \mid T_3$	$\sqrt{2}(f_2 \pm f_1) + (f_4 \pm f_3)$ $-\sqrt{2}(f_2 \pm f_1) + (f_4 \pm f_3)$	$f_1 f_2 = -f_3 f_4$
24	$f_1 = \eta(2z)\eta(12z)$ $f_2 = \eta(4z)\eta(6z)$ $f_3 = f_1 \mid T_5$ $f_4 = f_2 \mid T_5$	$\sqrt{3}(f_2 \pm f_1) + (f_4 \pm f_3)$ $-\sqrt{3}(f_2 \pm f_1) + (f_4 \pm f_3)$	$f_1 f_2 = -f_3 f_4$
21	$f_1 = \eta(z)\eta(21z)$ $f_2 = \eta(3z)\eta(7z)$ $f_3 = f_1 \mid T_5$ $f_4 = f_2 \mid T_5$	$\sqrt{3}(f_2 \pm f_1) + (f_4 \pm f_3)$ $-\sqrt{3}(f_2 \pm f_1) + (f_4 \pm f_3)$	$f_1 f_4 = -f_2 f_3$
49	$f_1 = \eta(z)\eta(49z)$ $f_2 = f_1 \mid T_5$ $f_3 = f_2 \mid T_5 = (f_1 \mid T_5) \mid T_5$ $f_4 = \eta(7z)^2 = -f_1 \mid U_7$ $f_5 = f_1 \mid T_{13}$ $f_6 = f_4 \mid T_7$	$\pm 2 f_2 + f_3$ $\pm f_4 + f_6$ $\pm 4 f_1 \mp f_3 + 2 f_5$	$f_2 f_4$

本論中では扱わなかったη関数の組み合わせについては以下にまとめておく.

LevelN	eta products	weight1 の Hecke eigenform	weight2 の cuspform
20	$g_1 = \eta(z)\eta(20z)$ $g_2 = \eta(4z)\eta(5z)$ $g_3 = g_1 \mid T_3$ $g_4 = g_2 \mid T_3$	$\sqrt{2}(g_2 \pm g_1) + (g_4 \pm g_3)$ $-\sqrt{2}(g_2 \pm g_1) + (g_4 \pm g_3)$	$g_1 g_4 = -g_2 g_3 = {f_1}^2$
32	$g_1 = \eta(2z)\eta(16z)$ $g_2 = g_1 \mid T_3$	$\pm\sqrt{2} g_1 + g_2$	$g_1 g_2 = {f_1}^2$
36	$g_1 = \eta(2z)\eta(18z)$ $g_2 = g_1 \mid T_5$	$\pm\sqrt{3} g_1 + g_2$	$g_1 g_2 = {f_1}^2$

9 Deligne-Serreの定理について

最後に，Deligne-Serre の定理について述べる (Deligne & Serre:[9],Serre:[10] 参照).

定義 9.0.2
Dirichlet 級数とは，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ の形で表される級数をいう．特に，a_n が，modular form $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ の係数であるとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = L(s, f)$$

と書く．

$L(s, f)$ は右半平面で収束する．また，f が Hecke eigenform のとき，$L(s, f)$ は Euler 積表示を持つことが知られている．

f が，特に，Dirichlet 指標 ϵ (ただし $\epsilon(-1) = (-1)^k$) を持つ，weight k の normalised された newform であるとき，

$$L(s, f) = \prod_{p \nmid N} (1 - a_p p^{-s} + \epsilon(p) p^{k-1-2s})^{-1} \prod_{p | N} (1 - a_p p^{-s})^{-1}$$

と表すことができる．

Deligne-Serre は，次に紹介する定理により，weight 1 の，この指標 ϵ を持つ cuspform は常に，$\mathbb{Q}$ 上の Galois 群の 2 次の表現の Artin L 関数に対応することを示した．

定理 9.0.3 (**Deligne-Serreの定理**)
N を自然数，ϵ を $\epsilon(-1) = -1$ を満たす mod N で定まる Dirichlet 指標とする．$f \in S_1(\Gamma_0(N), \epsilon)$ とする (f は恒等的に零ではない)．f が，固有値 a_p を持つ $T_p (p \nmid N)$ の固有関数ならば，

$$\mathrm{Tr}(F_{\rho,p}) = a_p, \quad \det(F_{\rho,p}) = \epsilon(p), \ (p \nmid N)$$

となるような，線形表現

$$\rho : G \longrightarrow GL(2, \mathbb{C}), \quad (G = Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}))$$

が存在する．この表現は，f が cuspform の場合のみ既約表現となり，さらに，newform であるときには，次が成立する．

1. ρ による Artin の conductor は N である．

2. Artin L 関数 $L(s, \rho)$ は $L(s, f)$ に等しい．

今まで考察してきた η 関数の 2 つの積で構成される weight 1 の cuspform の指標の中で，mod N で定まる Dirichlet 指標になっていたのは，$N = 15$ の χ^3 の場合だけであった ($f_1(z) = \eta(z)\eta(15)$ の $\Gamma_0(N)$ に関する指標を χ とすると，$\chi^3 \begin{pmatrix} a & b \\ 15c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{-15}{d}\right)$)．しかし，7.2 章で考察したように，$\dim S_1(\Gamma_0(15), \chi^3) = 0$ であったので，Deligne-Serre の定理を適用することはできない．

しかし，井畑は修士論文 [4] において，$f(z) = \eta(z)\eta(lz)$(ただし，l は $(l+1)|24$ なる自然数) の場合に，f の定める Dirichlet 級数 $L(s, f)$ が，虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-l})$ のイデアル類群に対する Hecke L

関数に等しいこと，さらにそれが，$\mathbb{Q}$ 上の Artin L 関数に等しいことを具体的に計算して確かめた．今回，我々が考えている η 関数の積の中で，$N = 11, 20, 27, 32, 36$ の場合は，本質的に井畑が考察したものと同じである (これらはいずれも，Dirichlet 指標ではない).

各 Level$N$ の Hecke eigenform と対応する虚 2 次体，類体，Hecke charactor を以下にまとめてみた．Dirichlet 級数 $L(s,f)$ が，表に定める Hecke charactor の場合に Hecke L 関数に等しいことは，数値計算により予想される．

N	weight1 の Hecke eigenform	$\mathbb{Q}(\sqrt{m})$	mod	$\mathbf{H}$ の構造	指標
11	$f_1 = \eta(z)\eta(11z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$	$2\mathcal{O}$	$\mathbf{H}(2) =< \mathfrak{p}_3 >$ $\cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\chi(\mathfrak{p}_3) = \zeta_3$
27	$f_1 = \eta(3z)\eta(9z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	$6\mathcal{O}$	$\mathbf{H}(6) =< \mathfrak{p}_7 >$ $\cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\chi(\mathfrak{p}_7) = \zeta_3$
20	$f_1 = \eta(2z)\eta(10z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$	$2\mathcal{O}$	$\mathbf{H}(2) =< \mathfrak{p}_3 >$ $\cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$\chi(\mathfrak{p}_3) = \zeta_4$
32	$f_1 = \eta(4z)\eta(8z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$	$4\mathcal{O}$	$\mathbf{H}(4) =< \mathfrak{p}_3 >$ $\cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$\chi(\mathfrak{p}_3) = \zeta_4$
36	$f_1 = \eta(6z)^2$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	$6\mathcal{O}$	$\mathbf{H}(6) =< \mathfrak{p}_5 >$ $\cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$\chi(\mathfrak{p}_5) = \zeta_4$
15	$\pm f_1 + f_2$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$	$3\mathcal{O}$	$\mathbf{H}(3) =< \mathfrak{p}_2 >$ $\cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$\chi(\mathfrak{p}_2) = \zeta_6$
17	$\pm\sqrt{2}f_1 + f_2$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-17})$	$2\mathcal{O}$	$\mathbf{H}(2) =< \mathfrak{p}_3 >$ $\cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$	$\chi(\mathfrak{p}_3) = \zeta_8$
19	$\pm\sqrt{3}f_1 + f_2$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-19})$	$6\mathcal{O}$	$\mathbf{H}(6) =< \mathfrak{p}_5 >$ $\cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$	$\chi(\mathfrak{p}_5) = \zeta_{12}$
14	$\sqrt{2}(f_2 \pm f_1) + (f_4 \pm f_3)$ $-\sqrt{2}(f_2 \pm f_1) + (f_4 \pm f_3)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-14})$	$4\mathcal{O}$	$\mathbf{H}(4) =< \mathfrak{p}_3 > \times < \mathfrak{p}_7 >$ $\cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\chi(\mathfrak{p}_3) = \zeta_8$ $\chi(\mathfrak{p}_7) = \zeta_2$
24	$\sqrt{3}(f_2 \pm f_1) + (f_4 \pm f_3)$ $-\sqrt{3}(f_2 \pm f_1) + (f_4 \pm f_3)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$	$12\mathcal{O}$	$\mathbf{H}(12) =< \mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_7 > \times < \mathfrak{p}_7 >$ $\cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$	$\chi(\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_7) = \zeta_4$ $\chi(\mathfrak{p}_7) = \zeta_{12}$
21	$\sqrt{3}(f_2 \pm f_1) + (f_4 \pm f_3)$ $-\sqrt{3}(f_2 \pm f_1) + (f_4 \pm f_3)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-21})$	$6\mathcal{O}$	$\mathbf{H}(6) =< \mathfrak{p}_5 > \times < \mathfrak{p}_7 >$ $\cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\chi(\mathfrak{p}_5) = \zeta_{12}$ $\chi(\mathfrak{p}_7) = \zeta_2$
49	$\pm 2f_2 + f_3$ $\pm f_4 + f_6$ $\pm 4f_1 \mp f_3 + 2f_5$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	$42\mathcal{O}$	(※注 1)	(※注 2)

※注 1

$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ 上，192 次拡大になる．

※注 2

指標 χ は次のように定まる．

$\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\omega], \omega = \sqrt{-1}$

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathcal{O}/42\mathcal{O})^\times & \cong & (\mathcal{O}/2\mathcal{O})^\times & \times & (\mathcal{O}/3\mathcal{O})^\times & \times & (\mathcal{O}/7\mathcal{O})^\times \\ \text{生成元} & & <\omega> & & <1+\omega> & & <2+\omega> \\ \text{位数} & & 2 & & 8 & & 48 \\ & & \chi_2 & & \chi_3 & & \chi_7 \end{array}$$

$\chi_2(i)=-1$, $\chi_3(1+i)=i$, $\chi_7(i)=i$ で，χ_2,χ_3,χ_7 を定めて，指標 χ を

$$\chi=\chi_2\chi_3{\chi_7}^3$$

で定義する．

予想

以上の表のように，Hecke charactor χ を定めると，

$$L(s,f)=L(s,\chi)$$

が成立する．

参考文献

[1] A.O.L.Atkin,J.Lehner: *Hecke operators on* $\Gamma_0(N)$ (Math.Ann.,185 1970,pp.130-160)

[2] 土井公二・三宅敏恒: 『保型形式と整数論』(紀伊國屋書店，1976)

[3] M.Eichrer: *Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen* (Birkhäuser verlag Basel und Stuttgart,1963)

[4] 井畑智子: 『Dedekind η 関数の積のフーリエ展開の係数について』(大阪大学大学院修士論文，2004)

[5] 岩澤健吉: 『代数函数論 (増補版)』(岩波書店，1973)

[6] 河田敬義: 『1 変数保型函数の理論 (I)』(東大数学セミナリーノート 4, 1963)

[7] 河田敬義: 『数論 (I)』(岩波書店, 1978)

[8] K.Ono: *The web of modularity : Arithmetric of the coefficients of modular forms and q-series* (Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences by the American Mathematical Society with support from the National Science Foundation,2004)

[9] P.Deligne & J.P.Serre: *Formes modulaires de poids1* (Ann.Sci.Ec.Norm.Sup.7,1974,pp.507-530)

[10] J.P.Serre: *Modular forms of weight one and Galois representations* (Algebraic Number Fields,édité par A.Fröhlich,Acad.Press,1977,pp.193-268)

[11] 清水英男: 『保型関数 (I)』(岩波書店，1977)

[12] G.Shimura: *Introduction to the arithmetric theory of automorpfic functions* (Iwanami Shoten, Publishers and Princeton University Press, 1971)

[13] 高木貞治: 『初等整数論講義 (第 2 版)』(共立出版，1971)

[14] 高木貞治: 『代数的整数論 (第 2 版)』(岩波書店, 1971)

[15] 山本芳彦: 『数論入門』(岩波書店, 2003)