三角関数の『合成』とは？（その①）

ゴーセイは こうせい!!

例えば，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$ を加法定理を用いてバラすと，

これは余裕

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$$

と，○$\sin\theta$＋△$\cos\theta$ の形に分解されます． ふむふむ… 当たり前やな。

この計算式の逆をたどることが三角関数の合成です．つまり，

"加法定理"でバラす。

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$$

"合成"してまとめる。

イメージ

$$(x+1)(x-1)\ \underset{\text{因数分解}}{\overset{\text{展開}}{\rightleftarrows}}\ x^2-1$$

ようするに，**三角関数の合成とは加法定理の単なる逆に過ぎません．**

な～んや 逆をするだけか～

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\ \underset{\text{合成}}{\overset{\text{加法定理}}{\rightleftarrows}}\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$$

展開と因数分解みたいな関係やな。

よって**三角関数を合成するときは常に加法定理を頭の中にイメージすることが大切**です．

似てる～

加法定理とは，

おなじみ "最高の交際"

$$\sin(\theta\pm\alpha)=\sin\theta\cos\alpha\pm\cos\theta\sin\alpha$$
$$=\cos\alpha\sin\theta\pm\sin\alpha\cos\theta$$

積の前後を入れ換える。

つまり，

$\sin\theta$の係数が$\cos\alpha$，$\cos\theta$の係数が$\sin\alpha$ とみる。

▷Point◁

○$\sin\theta\pm$△$\cos\theta$ において，○ $=\cos\alpha$，△ $=\sin\alpha$ と置き換えることができれば，このときの α を用いて，

○$\sin\theta\pm$△$\cos\theta=\cos\alpha\sin\theta\pm\sin\alpha\cos\theta$
$=\sin\theta\cos\alpha\pm\cos\theta\sin\alpha$
$=\sin(\theta\pm\alpha)$

$\sin\theta$の係数が$\cos\alpha$
$\cos\theta$の係数が$\sin\alpha$と思うと…
"最高の交際"になる。

というように，三角関数の合成が完成する． ヤッタネ♡

【例】 $\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$ を合成せよ．

$\cos\alpha$と思う　$\sin\alpha$と思う

すると
$\Longrightarrow\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta=\sin(\theta+\alpha)$

$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ をみたすαは　$\alpha=\frac{\pi}{3}$．

$\therefore\ \frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ //

【例】 $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$ を合成せよ．

$\cos\alpha$と思う　$\sin\alpha$と思う

すると
$\Longrightarrow\cos\alpha\sin\theta-\sin\alpha\cos\theta=\sin(\theta-\alpha)$

$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ をみたすαは．$\alpha=\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ //

さて，次に問題になるのは，○$\sin\theta$＋△$\cos\theta$ を合成するとき，「いつでも勝手に ○ $=\cos\alpha$，△ $=\sin\alpha$ と置き換えてしまって良いのか？」ということです．実は，

重要

$\boxed{\text{○}^2+\text{△}^2=1\ \text{ならば，○}=\cos\alpha,\ \text{△}=\sin\alpha\ \text{と置き換えることができます．}}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1$

確かに!!

先ほどの例では，最初から ○^{2}＋△$^2=1$ の形になっていたので，いきなり置き換えても構わないのですが，例えば，$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ を合成しようとした場合，$1^2+(\sqrt{3})^2=4\neq1$ なので，$1=\cos\alpha$，$\sqrt{3}=\sin\alpha$ と置き換えることはできません．

そこで，次のように変形します．

ふ～ん そりゃ そうやなあ…

▷Point◁

$a\sin\theta\pm b\cos\theta$ を $\sqrt{a^2+b^2}$ でくくり出し，

$$a\sin\theta\pm b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)\quad ①$$

と変形すると，$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$，$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$ **と置き換えることができる．**

したがって，

$$a\sin\theta\pm b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin\theta\pm\sin\alpha\cos\theta)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha\pm\cos\theta\sin\alpha)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta\pm\alpha)$$

と合成できる．

なぜ，$\sqrt{a^2+b^2}$ でくくり出したのか？

なんでなん？ なんで $\sqrt{a^2+b^2}$ なん？

上のPoint内の ── ①部分の $\sin\theta$と$\cos\theta$の前の係数を2乗して足す。

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$$

2乗の和が1になった!!

となり，○^{2}＋△$^2=1$ の形をみたしているので，$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$，$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$ と置き換えることができます．

オ～ スゴイ

つまり，○^{2}＋△$^2=1$ の形を作るために，$\sqrt{a^2+b^2}$ でくくり出したのですね．

$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ よって $\sqrt{2}$ でくくり出す。

【例】 $\sin\theta+\cos\theta$ を合成せよ．

$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ //

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta=\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta=\sin(\theta+\alpha)\right)$

$\underbrace{\cos\alpha\quad\sin\alpha}_{\alpha=\frac{\pi}{4}}$　入れる

慣れてきたら いきなり答えでも かまへんで

【例】 $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$ を合成せよ．

$\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$ よって 2でくくり出す。

$=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

$=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ //

$\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\cos\alpha\sin\theta-\sin\alpha\cos\theta=\sin(\theta-\alpha)\right)$

$\underbrace{\cos\alpha\quad\sin\alpha}_{\alpha=\frac{\pi}{3}}$　入れる