高校数学全分野の中で
最も重要な公式の1つです

加法定理

メチャメチャ
大切だよ

三角関数の加法定理はとても重要な定理で，絶対に暗記せねばなりません．今回はその加法定理の中から，まずは次の 2 つの公式を下の図を利用して証明してみよう．

はーい

▷Point◁ (sin と cos の加法定理その ①)

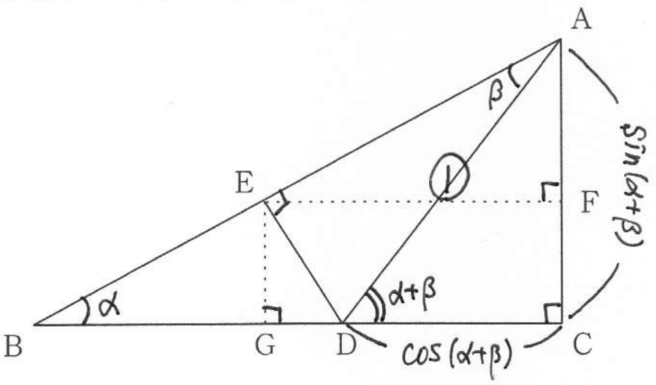
符号に注意

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ← 最高の文際 ♡

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

この公式がキホン．
ここから全てが始まる．

解 下の図で $\angle ABC=\alpha$，$\angle DAB=\beta$，$AD=1$ とする．



こんな図から
証明できるなんて
スゴイなあ〜

うん

$\triangle ADC$ において，$\angle ADC=\alpha+\beta$，$AD=1$ より，

$AC=\sin(\alpha+\beta)$ ⋯ ①

$CD=\cos(\alpha+\beta)$ ⋯ ②

$\triangle ADE$ において，$\angle DAE=\beta$，$AD=1$ より，

$AE=\cos\beta$，　$DE=\sin\beta$

$\triangle AEF$ において，$\angle AEF=\alpha$，$AE=\cos\beta$ より，

$AF=AE\sin\alpha=\sin\alpha\cos\beta$ ⋯ ③

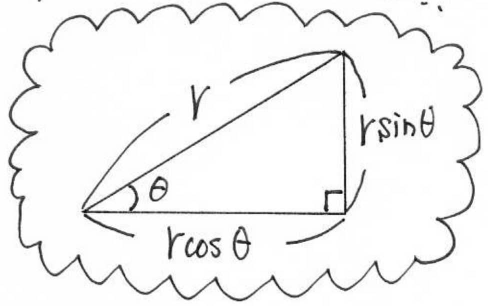
$EF=AE\cos\alpha=\cos\alpha\cos\beta$ ⋯ ④

$\triangle DEG$ において，$\angle DEG=\alpha$，$DE=\sin\beta$ より，

$EG=DE\cos\alpha=\cos\alpha\sin\beta$ ⋯ ⑤

$GD=DE\sin\alpha=\sin\alpha\sin\beta$ ⋯ ⑥

証明のポイントはコレ!!



サッとすぐに答えられるように!!

はーい

ここで，$AC=AF+FC=AF+EG$ なので，①，③，⑤より，

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ← 出た!!

ここで，$CD=GC-GD=EF-GD$ なので，②，④，⑥より，

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ← 出た!!

実にうまい証明!!

バンザーイ

あっぱれ
お見事!!

■

次の公式は，先ほどの公式において β の代わりに $-\beta$ を代入すれば自動的に出てきます．

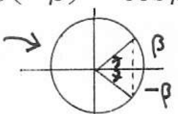
符号に注意

▷Point◁(sin と cos の加法定理その ②)

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

解 $\sin(-\beta)=-\sin\beta$, $\cos(-\beta)=\cos\beta$ だから，

これをイメージする



$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin(\alpha+(-\beta))\\&=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)&=\cos(\alpha+(-\beta))\\&=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

■

tan の加法定理の公式は，これまでに登場した公式を組み合わせれば求めることができます．

符号に注意

▷Point◁(tan の加法定理)

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

解

sinとcosの加法定理

分母分子をcosαcosβで割ります

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\&=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\\&=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}\\&=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}\\&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

スッキリ～

$\tan(-\beta)=-\tan\beta$ だから，

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta)&=\tan(\alpha+(-\beta))\\&=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}\\&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

■

参考 ちょっと昔の話ですが，次の問題が東京大学で出題され受験業界で衝撃が走りました．

ショック ガーン

東京大学 (1999 年前期理系第 1 問)

(1) 一般角 θ に対して，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の定義を述べよ．

(2) (1) で述べた定義にもとづき，一般角 α，β に対して，

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ． 東大でこんな問題が出るなんて!!

なんと，加法定理の証明が東大理系数学の第 1 問として出題されたのです (確か配点は 120 点満点中の 20 点)．確かに基本問題ではありますが，大半の受験生の出鼻を挫く問題として，それなりの威力があったであろうと推測できます．僕でもビビります．

うん コワイ…

(1) で $\sin\theta$，$\cos\theta$ の定義を述べさせた上で証明させているあたりが東京大学らしい品格を感じます．というのも，$\sin\theta$，$\cos\theta$ をどう定義するのかによって証明方法が変わってくるからです．

一般に，$\sin\theta$，$\cos\theta$ は単位円上の座標として定義されます．ということは，左に紹介した証明は (確かにわかりやすい証明ではありますが) 定義に従っていないのでルール違反です．じゃあ，直角三角形の辺の比や長さを $\sin\theta$，$\cos\theta$ の定義にすれば左の証明でも大丈夫なのか？と考えてしまいますが，そうすると一般角 θ で考えることができないので，やっぱりダメです (困った!)．そんなときは教科書を見よう．単位円の定義に基づく (正式な) 証明が教科書に載っているので各自で勝手に見といてください．

はーい