加法定理一族の家系図

すべては、加法定理から始まるんやで。
作り方を理解し、自分で導き出せるようにしておこう。

基本の相互関係

基本中の基本

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

両辺を$\cos^2\theta$でわる

$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

2倍角の公式

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ より $\sin^2\alpha$だけ、$\cos^2\alpha$だけでそろえる。

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

結局、$\cos 2\alpha$には、3通りの表し方があり、これらは状況に応じて使い分ける必要があります。

変形

$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\tan^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

$\alpha=\dfrac{\theta}{2}$とおいただけ

同じ

半角の公式

$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$

$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$

$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

これらは、次数下げの公式として使います。数Ⅲでもよく登場します。

$\beta=\alpha$とする

加法定理⊕

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ …①

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ …②

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ $\left(\leftarrow\dfrac{①}{②}より\right)$

βのかわりに$-\beta$を代入

加法定理⊖

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ …③

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ …④

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ $\left(\leftarrow\dfrac{③}{④}より\right)$

$\beta=2\alpha$として2倍角の公式を利用する

3倍角の公式

$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

$\cos 3\alpha=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha$

変形

$\sin^3\alpha=\dfrac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}$

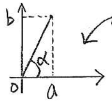
$\cos^3\alpha=\dfrac{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}{4}$

次数下げの公式として使います。数Ⅲで、たまに登場します。

3角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$ …(※)

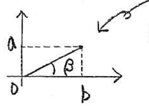
sinで合成　$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$，$\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$ とおくと



$(※)=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta)$

$=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha)$

cosで合成　$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\beta$，$\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\beta$ とおくと



$(※)=\sqrt{a^2+b^2}\,(\sin\beta\sin\theta+\cos\beta\cos\theta)$

$=\sqrt{a^2+b^2}\,\cos(\theta-\beta)$

加法定理

$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{6}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta$

合成

つまり、3角関数の"合成"とは、加法定理の単なる逆に過ぎません。ビビる必要なし！

展開と因数分解みたいな関係やなあ

積→和の変換公式

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$ $\left(\leftarrow\dfrac{①+③}{2}より\right)$

$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$ $\left(\leftarrow\dfrac{①-③}{2}より\right)$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$ $\left(\leftarrow\dfrac{②+④}{2}より\right)$

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$ $\left(\leftarrow\dfrac{②-④}{2}より\right)$

注意!!

この公式は数Ⅲの積分で重要な役割をはたします。

$\alpha+\beta=A$，$\alpha-\beta=B$ とおくと、$\alpha=\dfrac{A+B}{2}$，$\beta=\dfrac{A-B}{2}$

和→積の変換公式

$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

注意!!