$ax+by$ の話

1　有名事実

▷Point◁

定理①
a，b を整数とする．a，b が互いに素のとき，$ax+by=1$ となる整数 x，y が存在する．

例えば，互いに素な 2 数として，$a=3$，$b=5$ とすると，$3x+5y=1$ を満たす整数 x，y は確かに存在します（$(x,\ y)=(2,\ -1),(7,\ -4),\cdots$ などたくさんある）．

しかし，互いに素でない 2 数として，$a=3$，$b=6$ とすると，$3x+6y=1$ を満たす整数 x，y は絶対に存在しません．なぜなら

$$3(x+2y)=1$$

と変形できるからで，$3\times$（整数）$=1$ なんておかしいですね．

定理①から次が導き出されます．

▷Point◁

定理②
a，b，c を整数とする．a，b が互いに素であるとき，$ax+by=c$ となる整数 x，y が存在する．

これもほとんど明らかでしょう．**定理①**より，a，b が互いに素であるとき，$ax+by=1$ となる整数 x，y が存在するので，そのときの x，y を $x=p$，$y=q$ とすると，

$$ap+bq=1$$

両辺を c 倍すると，

$$a(cp)+b(cq)=c$$

この式は，$x=cp$，$y=cq$ が $ax+by=c$ の解であることを意味しています．つまり，$ax+by=c$ となる整数 x，y が存在します．

▷Point◁

$ax+by=1$ となる整数 x，y を c 倍すれば，$ax+by=c$ をみたす整数が得られる．

以上の事柄は，きちんと証明するべきですが，ちょっと難しいので，とりあえず事実として認めて問題を先に解きましょう．証明は後ほど紹介します．

例題 1.
(1)　$2x+3y=1$ をみたす整数 x，y を 1 組見つけよ．
(2)　$2x+3y=1$ をみたす整数 x，y をすべて見つけよ．

考え方　(1) はすぐに見つかるでしょう．何でもいいから 1 組書いてください．説明なしに答えだけでかまいません．(2) は典型的な定番問題なので，やり方を覚えてしまいましょう．

解　(1)　$(x,\ y)=(2,\ -1)$

(2)　$2x+3y=1$ の解の 1 つは
$(x,\ y)=(2,\ -1)$ である．
これを代入して，$2\times2+3\times(-1)=1$
もとの方程式 $2x+3y=1$ と辺々引き算して，

$$\begin{array}{rccccccl} & 2 & \times & x & + & 3 & \times & y & =1 \\ -) & 2 & \times & 2 & + & 3 & \times & (-1) & =1 \\ \hline & 2 & \times & (x-2) & + & 3 & \times & (y+1) & =0 \end{array}$$

$$\therefore\ \ 2(x-2)=-3(y+1)$$

よって，$2(x-2)$ が 3 の倍数になるが，2 と 3 は互いに素なので，$x-2$ が 3 の倍数にならねばならない．よって，k を整数として

$$x-2=3k$$

と表せる．このとき，$2\times3k=-3(y+1)$ より，

$$y+1=-2k$$

したがって，

$$(x,\ y)=(2+3k,\ -1-2k)$$

■

✎注　この解答の根底にあるのは次の事実です．

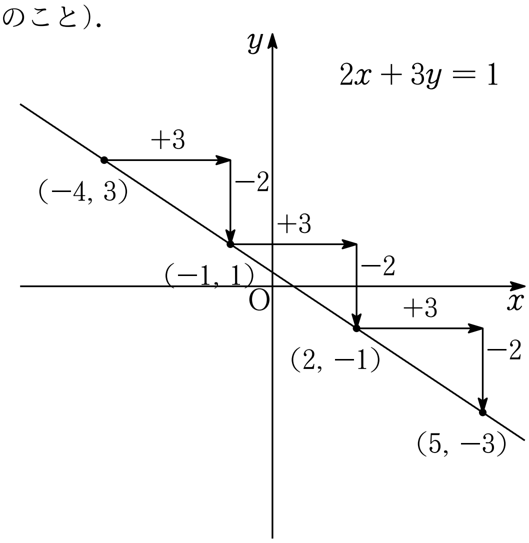
▷Point◁（整数の基本性質）

A と B が互いに素な整数のとき，AC が B で割り切れるならば，C は B で割り切れる．

AC が B で割り切れるとき，$\dfrac{AC}{B}$ は整数になるが，A と B が互いに素なので約分できないから，C が B で割り切れなければならないということです．まあ，当たり前ですよね．

参考 図形的に解釈することもできます．

$2x+3y=1$ は xy 平面で直線を表しています．したがって，「$2x+3y=1$ をみたす整数 x，y」とは「直線 $2x+3y=1$ 上の格子点」に他なりません（格子点とは x 座標と y 座標が共に整数である点のこと）．



直線の傾きが $-\dfrac{2}{3}$ なので，x 軸方向に $+3$ 進んで，y 軸方向に 2 下がるから，上の図を見れば分かるように，「直線 $2x+3y=1$ 上の格子点」は等間隔に存在しています．

$\to(-4,3)\to(-1,1)\to(2,-1)\to(5,-3)\to$

これらの点は，どっか 1 つの点を基準にして，x 座標が 3 ずつ増える，y 座標が 2 ずつ減る，と考えて表現します．今回の場合，点 $(2,\ -1)$ を初期値として選んだので，格子点の座標は

$$(x,\ y)=(2+3k,-1-2k)$$

と表現できるのです．初期値が変われば表記方法が変わりますが，同じことです．

k にいろんな整数を代入すれば，格子点がどんどん湧き出てくるでしょう．

例 題 2.
$9x-5y=7$ をみたす整数 x，y をすべて見つけよ．

考え方 **例 題 1.** でやったように，まずは $9x-5y=7$ をみたす整数 x，y を 1 つ見つけなければどうしようもありません．この程度なら，カンで何とか見つかるでしょう．

解 $(x,\ y)=(3,\ 4)$ は $9x-5y=7$ を満たしているので，

これを代入して，$9\times3-5\times4=7$

もとの方程式 $9x-5y=7$ と辺々引き算して，

$$\begin{array}{rccccccl} & 9 & \times & x & - & 5 & \times & y & =7\\ -) & 9 & \times & 3 & - & 5 & \times & 4 & =7\\ \hline & 9 & \times & (x-3) & - & 5 & \times & (y-4) & =0\end{array}$$

$$\therefore\ 9(x-3)=5(y-4)$$

よって，$9(x-3)$ が 5 の倍数になるが，9 と 5 は互いに素なので，$x-3$ が 5 の倍数にならねばならない．よって，k を整数として

$$x-3=5k$$

と表せる．このとき，$9\times5k=5(y-4)$ より，

$$y-4=9k$$

したがって，

$$(x,\ y)=(3+5k,4+9k)$$

■

注 $(x,\ y)=(3,\ 4)$ の見つけ方のヒント．

$9x-5y=7$ より，$9x=5y+7=5(y+1)+2$ なので $9x$ が 5 で割ると 2 余ることがわかります．よって，9 の倍数 (9，18，27，36，…) の中で 5 で割ると 2 余る数を探すと，27 が最初にヒットします．よって，$x=3$ となるのです．

このようにテキトーに数字を当てはめて狙うのではなく，ちょっと工夫すれば，見つけやすくなるでしょう．

▷Point◁

$ax+by=c$ に関する問題では，とにかく整数 x，y を 1 組見つけること．

このように，「とにかく 1 組見つけること」が最優先課題ですが，係数が大きい数になるとなかなかすんなりとは見つかりません．例えば，

$$71x+32y=3$$

を満たす整数 x，y はすぐに見つかるでしょうか．ちょっとムリですね．

こういう場合，$72x + 32y = 1$ を満たす整数 x，y を考えて 3 倍します．では，$72x + 32y = 1$ を満たす整数 x，y はどうやって見つけるかというと・・・・・こんなときに効果を発揮するのが『座標筆算法』です．別の犬プリで解説してあるので，そちらを参照してください．

2　証明

それでは，$\boxed{\text{定理 ①}}$ を証明しよう．

そのためにはまず，次の定理を証明せねばなりません．

▷Point◁

> a，b が互いに素であるとする．
> このとき，$b-1$ 個の相異なる整数
>
> $$1a,\ 2a,\ 3a,\ \cdots,\ (b-1)a$$
>
> を b で割った余りには，1 から $b-1$ までの整数が 1 回ずつすべて（順不同で）現れる．

この定理はとても重要でいろいろな場面で活躍するので，ここでは $\boxed{\text{基本定理}}$ と呼ぶことにしよう．

それにしても本当にこんなことがおこるのでしょうか．ちょっと信じがたいですが，まずは具体的な数字で確認してみよう．

$\boxed{\text{具体例での確認}}$

まずは互いに素な 2 数として，$a = 3$，$b = 8$ としよう．7 個の整数

$$1\times3,\ 2\times3,\ 3\times3,\ 4\times3,\ 5\times3,\ 6\times3,\ 7\times3$$

を，8 で割った余りを求めると，

$$\begin{array}{lcl}
1\times3=3 & \longrightarrow & \text{余り } 3\\
2\times3=6 & \longrightarrow & \text{余り } 6\\
3\times3=9 & \longrightarrow & \text{余り } 1\\
4\times3=12 & \longrightarrow & \text{余り } 4\\
5\times3=15 & \longrightarrow & \text{余り } 7\\
6\times3=18 & \longrightarrow & \text{余り } 2\\
7\times3=21 & \longrightarrow & \text{余り } 5
\end{array}$$

確かに，余りに，1，2，3，4，5，6，7 が 1 回ずつ現れています．

次に，互いに素でない 2 数として，$a = 6$，$b = 8$ の場合で基本定理を確認してみよう．7 個の整数

$$1\times6,\ 2\times6,\ 3\times6,\ 4\times6,\ 5\times6,\ 6\times6,\ 7\times6$$

を 8 で割った余りを求めると，

$$\begin{array}{lcl}
1\times6=6 & \longrightarrow & \text{余り } 6\\
2\times6=12 & \longrightarrow & \text{余り } 4\\
3\times6=18 & \longrightarrow & \text{余り } 2\\
4\times6=24 & \longrightarrow & \text{余り } 0\\
5\times6=30 & \longrightarrow & \text{余り } 6\\
6\times6=36 & \longrightarrow & \text{余り } 4\\
7\times6=42 & \longrightarrow & \text{余り } 2
\end{array}$$

となり，余りは 0，2，4，6 しかありません．

なんとも不思議な結果ですね．どうしてこんなことが起こるのでしょうかね（他の数字の場合も試してみよう．やればやるほど不思議さが実感できるしょう）．

それでは $\boxed{\text{基本定理}}$ を証明しよう．

$\boxed{\text{基本定理}}$ の証明

$b-1$ 個の整数

$$1a,\ 2a,\ 3a,\ \cdots,\ (b-1)a$$

を b で割った余りは，1，2，…，$b-1$ のいずれかの数である．よって，$b-1$ 個の余りが全て異なることを示せばよい．

la，ma（$1 \leqq l < m \leqq n-1$）を b で割った余りが同じであると仮定すると，

$$\begin{aligned}
la &= bq_1 + r\\
ma &= bq_2 + r\\
\therefore\ (m-l)a &= b(q_2 - q_1)
\end{aligned}$$

a と b が互いに素なので，$m-l$ は b の倍数である．ところが，$1 \leqq l < m \leqq b-1$ より，$1 \leqq m-l \leqq b-2$ だから，$m-l$ は b の倍数にはならない．よって，矛盾．

したがって，$b-1$ 個の整数

$$1a,\ 2a,\ 3a,\ \cdots,\ (b-1)a$$

を b で割った余りは全て異なるので，題意は証明された．

■

さて，この 基本定理 から 定理 ① が簡単に証明されます．

定理 ① の証明

a，b が互いに素のとき，基本定理より，

$$1a,\ 2a,\ 3a,\ \cdots,\ (b-1)a$$

の中に，b で割ると余りが 1 になるものが必ず存在する．それを ka，そのときの商を q とおくと，

$$ka = bq+1$$
$$\therefore\quad ak+b(-q)=1$$

このことは，$ax+by=1$ の解が $x=k$，$y=-q$ であることを意味している．

つまり，a, b が互いに素であるとき，$ax+by=1$ を満たす整数 x，y が必ず存在する．

■

注 基本定理はただ単に余りが全部異なることを主張しているだけではなく，「余りが 1 になるものが必ず存在すること」の証明にもなっています．つまり，具体的にいつ余りが 1 になるかは分からないが，「**必ずある**」ということは断言できるのです．このことが， 定理 ① の証明のポイントでした．

3 応用 参考

さて， 定理 ② は「a，b が互いに素であるとき，$ax+by=c$ を満たす整数 x，y が必ず存在する」というものでした．つまり，

……

$3x+5y=-2$ を満たす整数 x，y が存在し，

$3x+5y=-1$ を満たす整数 x，y が存在し，

$3x+5y=0$ を満たす整数 x，y が存在し，

$3x+5y=1$ を満たす整数 x，y が存在し，

$3x+5y=2$ を満たす整数 x，y が存在し，

……

ということです．逆に考えると，$3x+5y$ の x と y にいろんな整数を代入すれば，$3x+5y$ の値がどのような整数値にもなり得ることを意味しています．よって， 定理 ② は次のように解釈することができます．

▷Point◁

定理 ②′

a，b が互いに素であるとき，$ax+by$（x，y は整数）は任意の整数値をとることができる．つまり，$ax+by$ の形ですべての整数を表現することができる．

このことをテーマにした入試問題は，難関大学でしばしば出題されるので注意が必要です．

さらに，x と y の条件を変えると，次のようなことも分かっています．

▷Point◁

a，b が互いに素であるとき，

$ax+by$ は x，y が自然数のとき，$ab+1$ 以上の整数はすべて表現できる．つまり，表現できない最大の整数は ab である．

また，x，y が 0 以上の整数のとき，$ax+by$ は $(a-1)(b-1)$ 以上の整数はすべて表現できる．つまり，表現できない最大の整数は $(a-1)(b-1)-1$ である．

これらの証明はきわめて難しいので省略しますが，阪大と津田塾大で具体的な数値の場合がそのまま出題されました．参考までに紹介しよう．解答は各自で探してください．

どのような負でない 2 つの整数 m と n を用いても，$x=3m+5n$ とは表すことができない正の整数 x をすべて求めよ．

[2000 年大阪大前期理系]

(iii) より，$(3-1)(5-1)=8$ 以上の整数はすべて表現できるので，7 以下の整数について考えればよいのです．

自然数 x と y を用いて $3x+59y$ の形で表せる自然数を $<3, 59>$ 数ということにする．

(1) 178 以上の自然数はすべて $<3, 59>$ 数であることを示せ．

(2) 177 は $<3, 59>$ 数でないことを示せ．

[2005 年津田塾大 (数)]

どうして 177 や 178 という数字がいきなり出てきたのかわかるでしょ．