整数問題としての[ガウス記号]

1　ガウス記号とは

ナニ?

ガウス記号 $[x]$ は高校では不連続関数の具体例として登場します．関数の連続性や不連続性の証明を苦手とする人が多いので，ガウス記号 $[x]$ も「難しい関数だ」と思ってしまうのは残念なことです．本来，ガウス記号 $[x]$ は整数問題で活躍します．

そうやねん

なんか苦手…

▷Point◁

☆ガウス記号の定義☆
実数 x に対して，x 以下の最大の整数を記号 $[x]$ で表す．

➾注　「x を超えない最大の整数」とも言います．

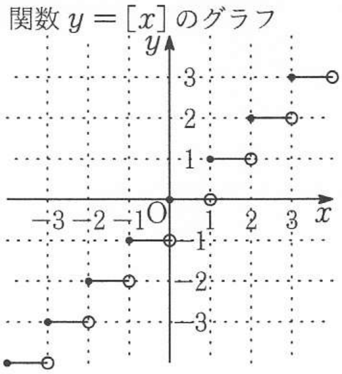
【例】　$[9.18]=9$,　$[7]=7$,　$[\pi]=3$

➾注　負の数の場合に注意しよう．
例えば，$[2.7]=2$,　$[-2.7]=-3$ となります．常に数直線をイメージすることがポイントです．数直線の左側で最も近い整数を選ぶのです．

よくまちがえます

フムフム

参考　関数 $y=[x]$ のグラフ



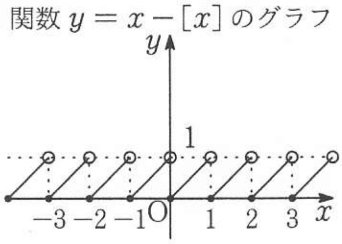
このグラフはおぼえておこう

見おぼえあるぞ

【例】　$x-[x]$ は実数 x の小数部分を表す．

$1.23-[1.23]=1.23-1=0.23$
$4.56-[4.56]=4.56-4=0.56$　などなど．

参考　関数 $y=x-[x]$ のグラフ



ノコギリみたいや

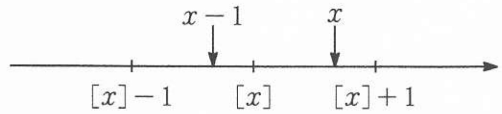
ハハハ

ガウス記号の定義より，次の重要な関係が成り立ちます．ガウス記号に関するほぼ全ての問題でこの関係を利用すると言っても過言ではない超重要な関係です．

▷Point◁(ガウス記号と不等式の関係)

$$[x]=n \iff n \leqq x < n+1$$
$$\iff [x] \leqq x < [x]+1$$
$$\iff x-1 < [x] \leqq x$$

数直線でのイメージ



とてもとても大切な関係式です。

➾注　不等式 $[x] \leqq x < [x]+1$ の意味をしっかり理解しよう．$[x]$ と $[x]+1$ は連続する 2 整数で，その間に実数 x が入っています．等号の付く位置にも注意しよう．

これらの関係は丸暗記するのではなく，意味をしっかり考えて自分で順番に書いていけるようにしよう．

ガウス記号の問題は，とにかく，この定義に従って解くしかありません．逆に言えば，これしか使えるものはないのです．

これだけなんか〜

▷Point◁

☆ガウス記号 $[x]$ の扱い方☆
ガウス記号の問題は，先ほどの関係を用いて，不等式と整数の問題に置き換えて考えることが原則である．特に，整数が数直線上に幅 1 でトビトビに存在するという感覚が重要である．

不等式をうまく利用するのです

とにかく，定義に当てはめて淡々と処理すること．ガウス記号自体はどうってことないです．

2　不等式で挟む

これから紹介する【例】は，「アタリマエ」のことなんですが，ガウス記号の証明方法になれるためにきちんと証明してみます．

【例】 n が整数のとき，$[n+x]=n+[x]$

整数はガウス記号の外に出せるということです

解 $[n+x]=p$ とおくと，

$$\begin{aligned}[n+x]=p &\iff p \leqq n+x < p+1 \\ &\iff p-n \leqq x < (p-n)+1 \\ &\iff [x]=p-n\end{aligned}$$

フムフム

よって，$p=[n+x]$ より，$[n+x]=n+[x]$ が成立する．

■

【例】 m，n を自然数とする．
$m \div n$ の商は $\left[\dfrac{m}{n}\right]$ に一致する．

解 $m \div n$ の商を q，余りを r とおくと，

$$m=nq+r \quad (0 \leqq r < n)$$

$$\frac{m}{n}=q+\frac{r}{n} \quad \left(0 \leqq \frac{r}{n} < 1\right)$$

ポイント

$$\therefore \left[\frac{m}{n}\right]=\left[q+\frac{r}{n}\right]=q+\left[\frac{r}{n}\right]=q+0=q$$

フムフム　先ほどの結果を使ってます

■

【例】 p，N を自然数とするとき，1，2，3，…，N の中の p の倍数は $\left[\dfrac{N}{p}\right]$ 個．

解 自然数 N に対して，

$$kp \leqq N < (k+1)p$$

をみたす整数 k が存在する．このとき，1，2，3，…，N の中の p の倍数は k 個である．

$k \leqq \dfrac{N}{p} < k+1$ だから，$\left[\dfrac{N}{p}\right]=k$

よって，1, 2, 3, …, N の中の p の倍数は $\left[\dfrac{N}{p}\right]$ 個である．

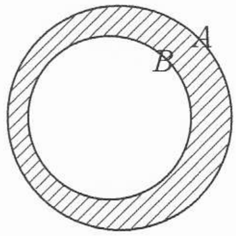
■

参考 p を素数，N を自然数とするとき，1，2，3，…，N の中で素因数分解したときの p の指数が k となる数（つまり p で k 回だけ割れる数）は，$\left[\dfrac{N}{p^k}\right]-\left[\dfrac{N}{p^{k+1}}\right]$ 個あります．

1, 2, 3, …, N の中の p^k の倍数の個数は，$\left[\dfrac{N}{p^k}\right]$ 個であり，p^{k+1} の倍数の個数は，$\left[\dfrac{N}{p^{k+1}}\right]$ 個です．

$\{p^k$の倍数$\} \supset \{p^{k+1}$の倍数$\}$（集合としての包含関係）だから，素因数分解したときの素因数 p の指数が k となるものは，$\left[\dfrac{N}{p^k}\right]-\left[\dfrac{N}{p^{k+1}}\right]$ 個となります．

詳しくは犬プリ「N!に含まれる素因数 p の個数」を参照してください．



A が p^k の倍数
B が p^{k+1} の倍数

集合 A の中に集合 B が入っています．つまり，図の斜線部分が，p^k の倍数だが p^{k+1} の倍数でない数，つまり，p で k 回だけ割れる数のことです．

【例】 自然数 m の桁数は，$[\log_{10} m]+1$

解 m が k 桁の自然数とすると，

$$10^{k-1} \leqq m < 10^k$$

各項の常用対数をとると，

$$k-1 \leqq \log_{10} m < k$$

ガウス記号の定義より，$[\log_{10} m]=k-1$ なので，$k=[\log_{10} m]+1$.

■

3　格子点の個数として考える

m を正の実数とするとき，$[m]$ は m 以下の自然数の個数を表しています．例えば，3.14 以下の自然数は 1，2，3 の 3 個で，確かに $[3.14]=3$ となっています．また，4 以下の自然数は 1，2，3，4 の 4 個で，これも確かに $[4]=4$ となっています．

このことから，ガウス記号を格子点の個数に対応させて考えることができます．

注 格子点の個数の求め方は既知とします．「数列」が未学習の場合は省略してかまいません．

全く新しい発想ですネ　だから数学はオモシロイ