整数問題攻略のための5つの原則

史上最大の数学者ガウス（Gauss， Carl Friedrich 1777〜1855 ドイツ）は

数学は科学の女王であり，整数論は数学の女王である

という言葉を残しました．ともすれば，我々は「数学は科学の基礎であり，整数論は数学の基本である」と単純に捉えがちですが，それを「女王」という言葉で表現したガウスのセンスは素晴らしいと思います．それは，科学の中で数学，とりわけ整数論が，最も美しく神秘的な魅力をもっていることを意味しています．そして，ガウスの言葉にはもう一つの意味が込められています．それは，数学を学ぶ上で，重要な考え方のほとんどがこの整数論に含まれていることです．

整数問題を考えることは最高の思考訓練になるため，難関大学でよく出題されます．変な受験テクニックや解法パターンの暗記に頼ることなく，本質をじっくり考えてもらおう，というのが大学側の意図するところなのでしょう．

整数問題を解くには，整数特有の性質をしっかりと理解しておく必要があります．まとめておこう．

▷Point◁（整数問題攻略の 5 つの原則）

原則 ① 整数の離散性（整数は幅 1 トビトビに存在する．）．
原則 ② 整数の候補を絞り込む（積の形を作る，次数に注目する．不等式の利用，対称性の利用）．
原則 ③ 特定の整数で割った余りに注目する．
原則 ④ 素因数分解の一意性
原則 ⑤ 具体例で実験する．

1 整数の離散性

実数が数直線上にベタ〜ッと存在するのに対し，整数は幅 1 でトビトビに存在します．これを**実数の連続性**，**整数の離散性**といいます．

【例】 m，n を整数とするとき，

$$m < n < m+1 \implies \text{矛盾}$$
$$m < n < m+2 \implies n = m+1$$

このことを利用した面白い問題を紹介しよう．

例題 1. n が 1 より大きい自然数のとき，

$$f(n) = n^2 - n + 1$$

は平方数にならないことを示せ．

考え方 平方数になることを示すのは簡単ですが（実際に作ればよい），平方数にならないことをいうのは難しいですね．しかし，整数の離散性から平方数もトビトビに存在しているわけだから，この場合の $f(n)$ がそのトビトビの隙間に入っていることを示せば良いのです．

解 $n > 1$ のとき，

$$f(n) - (n^2 - 2n + 1) = n > 0$$
$$n^2 - f(n) = n - 1 > 0$$

よって，$n^2 - 2n + 1 < f(n) < n^2$

$$\therefore\ (n-1)^2 < f(n) < n^2$$

となるので $f(n)$ は平方数にはならない．

■

また，n の倍数は幅 n でトビトビに存在します．つまり適当に連続する n 個の整数をとれば，その中には必ず n の倍数が 1 個存在します．つまり，n を 2 以上の自然数とするとき，連続する n 個の整数の中には，2 の倍数，3 の倍数，4 の倍数，⋯， n の倍数が必ず存在します．したがって，連続する n 個の整数の積は必ず $n!$ の倍数になります．特に，

連続 2 整数の積は偶数
連続 3 整数の積は 6 の倍数

であることは常識としておきたいところ．

例題 2.　$n>3$ とする．n と $n+2$ が共に素数のとき，$n+1$ は 6 の倍数であることを示せ．

考え方　3 種類の解答を紹介しよう．いずれも大切な考え方です．

解 1.

$n>3$ で n と $n+2$ が共に素数だから，n と $n+2$ は共に奇数である．よって，$n+1$ は偶数．

また，n，$n+1$，$n+2$ は連続 3 整数だから，このうち 1 つは必ず 3 の倍数．$n>3$ で n と $n+2$ が共に素数だから，これらが 3 の倍数になることはなく，$n+1$ が 3 の倍数になる．

したがって，$n+1$ は 2 の倍数かつ 3 の倍数になるので，6 の倍数である．

解 2.

$n(n+1)(n+2)$ は連続 3 整数の積なので 6 の倍数である．$n>3$ で，n と $n+2$ が共に素数なので，n と $n+2$ は共に 2 の倍数でも 3 の倍数でもないので，$n(n+2)$ は 6 の倍数にはならない．

よって，$n+1$ が 6 の倍数である．

解 3.

連続する 6 整数は

$$6m-2,\ 6m-1,\ 6m,\ 6m+1,\ 6m+2,\ 6m+3$$

と表現できる．この中で，

$6m-2$ と $6m+2$ は 2 の倍数

$6m+3$ は 3 の倍数

$6m$ は 6 の倍数

になるので，$n>3$ で n と $n+2$ が共に素数になるとき，$n=6m-1$，$n+2=6m+1$ になるしかないので，その間の数 $n+1$ が $6m$，つまり 6 の倍数になる．

■

参考 n と $n+2$ が共に素数のとき，この 2 つの素数を双子素数といいます．双子素数は

$$(3,\ 5),\ (5,\ 7),\ (11,\ 13),\ \cdots$$

など， 無限に存在すると考えられていますが，未だ証明されていません．上の **例題** は，$(3,\ 5)$ 以外の双子素数の間の数は必ず 6 の倍数であることを主張しているのです．

【例】　a が n の倍数のとき，

$$-n<a<n \implies a=0$$

また余りの均等性より，連続する n 個の整数の中には n で割ったときの余りが，1，2，$\cdots$，$n-1$ になる整数が必ず 1 つずつ存在します．当然ながら，n で割った余りが同じ数も幅 n ごとにトビトビに存在します．このように**整数が均等に循環している様子をイメージすることが重要**です．

例題 3.　どのような負でない整数 m，n をもちいても $x=3m+5n$ とは表すことができない正の整数を全て求めよ．

考え方　有名問題です．2000 年に阪大理系前期で出題されました．とりあえず m，n にいろいろ数を代入して考えますが，テキトーに代入するのではなく整理して順序よく代入しよう．その上で「余りの均等性」を思いつくかどうか．

解　$n=0$ のとき，$x=3m \geqq 0$ なので負でない 3 の倍数は全て表される．

$n=1$ のとき，

$$x=3m+5=3(m+1)+2 \geqq 5$$

なので 3 で割って 2 余る正の整数は 2 以外は全て表される．

$n=2$ のとき，

$$x=3m+10=3(m+3)+1 \geqq 10$$

なので 3 で割って 1 余る正の整数は 1，4，7 以外は全て表される

$n \geqq 3$ のとき，$x \geqq 15$ なので，1，2，4，7 は表すことはできない．

■

参考 下のように表にするとイメージしやすいでしょう．

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5	……………
0	0	3	6	9	12	15	……………
1	5	8	11	14	17	20	……………
2	10	13	16	19	22	25	……………
3	15	18	21	24	27	30	……………
4	20	23	26	29	32	35	……………
							……………………

最初の 1 行目には 0 以上の 3 の倍数が全て現れており，2 行目には 5 以上の 3 で割ると 2 余る整数が全て現れており，3 行目には 10 以上の 3 で割ると 1 余る整数が全て現れています．4 行目以下の最小値は 15 なので，4 行目以下に 1，2，4，7 が現れることはありません．

いずれにしても，3 で割った余りが同じ数が横一列に並んでいることを意識することが大切です．

2　整数の候補を絞り込む

整数の離散性より，整数はトビトビに存在するので，範囲や候補を絞り込めば，整数を特定することができます．「いかにして候補を絞り込むか」が整数問題を解くカギとなります．

2.1　積の形をつくる

例えば，x, y が実数のとき，$xy=3$ を満たす $(x,\ y)$ の組は無数に存在しますが，x, y が整数のとき，$xy=3$ を満たす $(x,\ y)$ の組は 4 組しか存在しません ($(x,\ y)=(\pm1,\ \pm3), (\pm3,\ \pm1)$ 複号同順)．このように，積の形を作れば，解の候補を絞り込むことができます．

例題 4.　次の等式をみたす整数の組 $(x,\ y)$ を全て求めよ．

(1) $xy+3x+2y+5=0$

(2) $2xy+x+3y+1=0$

考え方　積の形に変形する基本問題です．この問題では，

$$xy+ax+by+c=0$$
$$\iff (x+b)(y+a)=ab-c$$

の変形がポイント (なお，この公式は暗記するものではなく，その都度自分で作るものです)．

(2) は，xy の係数が 1 ではないので，まずは両辺を 2 で割って係数を 1 にすることから始めよう．

解 (1) $(x+2)(y+3)=6-5$ より，

$(x+2)(y+3)=1$

よって，$(x+2,\ y+3)=(1,\ 1), (-1,\ -1)$.

$\therefore\ (x,\ y)=(-1,\ -2), (-3,\ -4)$.

(2) $xy+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}y+\dfrac{1}{2}=0$ より，

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

ここで両辺を 4 倍して，$(2x+3)(2y+1)=1$ となる．したがって，

$(2x+3,\ 2y+1)=(1,\ 1), (-1,\ -1)$.

$\therefore\ (x,\ y)=(-1,\ 0), (-2,\ -1)$.

■

注 なお，カンが働く人は，始めから両辺を 2 倍して，$4xy+2x+6y+2=0$ より，いきなり $(2x+3)(2y+1)=1$ と変形しても構いませんが，なかなか思いつくものではないですね．

例題 5.　$m^2-n^2+m-5=0$ をみたす自然数の組 $(m,\ n)$ を求めよ．

考え方　積の形にうまく因数分解できない場合は，**平方完成する**とうまくいく場合があります．

解 m についての 2 次式と見て平方完成すると，

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-n^2-5=0$$
$$(2m+1)^2-4n^2=21$$
$$(2m+1+2n)(2m+1-2n)=21$$

m, n は自然数なので，$2m+1+2n>0$.

また，$2m+1+2n>2m+1-2n$ より，

$(2m+1+2n,\ 2m+1-2n)=(21,\ 1), (7,\ 3)$.

$\therefore\ (m,\ n)=(5,\ 5), (1,\ 2)$.

■

2.2　次数に注目する

例題 6.　等式 $3n+4=(m-1)(n-m)$ を満たす自然数の組 $(m,\ n)$ を求めよ．

考え方　次数に注目すると，n の方が次数が低いので，n について解くと，なかなかうまく処理できます．

分数式では「(分子の次数)<(分母の次数)」にするのが基本．整数問題に限らず様々な分野で用いられる手法です．

解　与式より，$(m-4)n=m^2-m+4$

$m=4$ とすると，(左辺) $=0$，(左辺) $=16$ となり不適．よって，$m \fallingdotseq 4$ であるから，n について解くと，

$$n=\frac{m^2-m+4}{m-4}=m+3+\frac{16}{m-4}$$

m，n は自然数なので $m-4$ は 16 の約数である．

$m \geqq 1$ より，$m-4 \geqq -3$ に注意して

$$m-4=-2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16$$

それぞれの場合に m，n を計算し自然数になる場合を調べれば良い．

m	5	6	8	12	20
n	24	17	15	17	24

となる．

■

例題 7.　m を整数とする．
$x^2+(m+3)x+3m+1=0$ の解がすべて整数となるような m を求めよ．

考え方　3 通りの方法で解いてみます．いずれも重要な考え方です．

解 1

$x^2+(m+3)x+3m+1=0$ の整数解を α，β とおくと，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-m-3, \qquad \alpha\beta=3m+1$$

m を消去して

$$\alpha\beta=3(-3-\alpha-\beta)+1$$
$$\alpha\beta+3\alpha+3\beta+8=0$$
$$(\alpha+3)(\beta+3)=1$$

α，β は整数なので

$$(\alpha+3,\ \beta+3)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$$

$$(\alpha,\ \beta)=(-2,\ -2),\ (-4,\ -4)$$

よって，$m=-\alpha-\beta-3$ より，$m=1$，5

■

解 2

$x^2+(m+3)x+3m+1=0$ の解は，解の公式より

$$x=\frac{-(m+3)\pm\sqrt{(m+3)^2-4(3m+1)}}{2}$$
$$=\frac{-(m+3)\pm\sqrt{m^2-6m+5}}{2}$$

よって，根号の中が平方数になる必要があるので

$$m^2-6m+5=d^2\ (d \geqq 0)$$
$$(m-3)^2-4=d^2$$
$$(m-3)^2-d^2=4$$
$$(m-3+d)(m-3-d)=4$$

m，d は整数であり，$m-3+d \geqq m-3-d$ に注意して

$m-3+d$	4	2	-2	-4
$m-3-d$	1	2	-2	-1

よって (表の上下を足して)，

$2m-6=5,\ 4,\ -4,\ -5$.

この中で m が整数になるのは，$m=1$，5

■

解 3

$x^2+(m+3)x+3m+1=0$ の整数解の 1 つを α とおくと，

$$\alpha^2+(m+3)\alpha+3m+1=0$$
$$m(\alpha+3)=-\alpha^2-3\alpha-1$$

$\alpha=-3$ とすると，(右辺) $=0$，(左辺) $\fallingdotseq 0$ となり不適．よって，$\alpha \fallingdotseq -3$ であるから，

$$m=-\frac{\alpha^2+3\alpha+1}{\alpha+3}$$
$$=-\frac{\alpha(\alpha+3)+1}{\alpha+3}$$
$$=-\alpha-\frac{1}{\alpha+3}$$

m が整数なので，$\alpha+3=\pm1$

よって，$\alpha=-2$，-4

■

2.3　不等式の利用

整数は実数の中に含まれますから，実数であることは整数であるための必要条件です．よって，まずは実数である条件を考え，そこから絞り込む方法もあります．

> 例題 **8.**　$x^2+2y^2-2xy-4x+6y+1=0$ をみたす整数の組 $(x,\ y)$ を求めよ．

解　x についての2次方程式とみて解の公式で解くと，

$$x^2-2(y+2)x+2y^2+6y+1=0$$
$$x=y+2\pm\sqrt{-y^2-2y+3}$$

x は実数でなければならないから，

$$-y^2-2y+3\geqq 0$$

$(y+3)(y-1)\leqq 0$ より，$-3\leqq y\leqq 1$.

y は整数なので，$y=-3,\ -2,\ -1,0,1$ と定まる．

このとき，それぞれに対して x が自然数になる場合を考えて，

x	-1	3	-1	1
y	-3	-1	-1	1

と定まる．

■

注　もし根号の y^2 の係数が正だったら，y の範囲を絞り込むことができません．その場合，根号内が平方数になる条件を考えることになります．例題 の **解 2**を参照のこと．

2.4　対称性に注目

与えられた式が対称式の場合，文字の大小関係に着目して，不等式のチカラを借りて整数の存在範囲を絞り込むという方法もよく用いられます．

与えられた文字に大小関係が設定されていない場合，自分で大小関係を設定して考えます．

> 例題 **9.**　$\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$ を満たす自然数の組 $(l,\ m,\ n)$ は全部で何組あるか．

解　与式は対称式なので，$l\leqq m\leqq n$ と設定しても一般性を失わない．

このとき，$\dfrac{1}{l}\geqq\dfrac{1}{m}\geqq\dfrac{1}{n}$ である．したがって，

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{l}+\frac{1}{l}+\frac{1}{l}$$

つまり，$1\leqq\dfrac{3}{l}$ となり，$l\leqq 3$.

l は自然数だから，$l=1,\ 2,\ 3$ と定まる．

(i) $l=1$ のとき．$1+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$ より，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=0$ となり，これをみたす自然数 $m,\ n$ は存在しない．

(ii) $l=2$ のとき．$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$ より，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2}$. したがって，$mn=2m+2n$. $(m-2)(n-2)=4$. $m\leqq n$ に注意して，組み合わせを考えると，$(m,\ n)=(3,\ 6),\ (4,\ 4)$.

(iii) $l=3$ のとき．$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$ より，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{2}{3}$. したがって，$2mn=3m+3n$. $(2m-3)(2n-3)=9$. $m\leqq n$ に注意して，組み合わせを考えると，$(m,\ n)=(3,\ 3)$.

以上より，$l\leqq m\leqq n$ のとき，

$$(l,\ m,\ n)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$$

と求まる．ここで，$(l,\ m,\ n)$ の大小関係をなくすと全部で10組の解が存在することがわかる．

■

注　なぜ $\dfrac{1}{l}$ を基準に大小関係を考えたのでしょうか．理由は「たまたまうまくいったから」です．例えば，$\dfrac{1}{n}$ で大小関係を考えると，

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$$

つまり，$\dfrac{3}{n}\leqq 1$ となり，$3\leqq n$. n の範囲を絞り込めていません．つまり，実際にいろいろ試してみて，うまく範囲が絞り込める場合を試行錯誤で見つけるのです．

3　余りで分類する

すべての整数は n で割ったときの余りによって n 個のグループに分類されます．例えば，3 で割った余りが 0，1，2 のいずれであるかによって，全整数は 3 つのグループに分類され，その各グループに含まれる数を k を整数として，

$$3k,\quad 3k+1,\quad 3k+2$$

と表します (場合によっては，$3k$，$3k\pm1$ ととることもあり，この方が計算が楽になることが多い)．全ての整数は，この 3 つのグループのいずれか 1 つに必ず属します．この考え方は，**無限個ある整数をグループ分けし，そのグループに属する数をまとめて扱う，という点において非常に重要な考え方で，多くの整数問題を解くときの基本となります．**

例題 10．n を整数とするとき，n^3+2n は 3 の倍数であることを示せ．

考え方　3 の倍数であることを示すのだから，3 で割った余りで分類します．

解　$n=3m$ のとき，

$n^3+2n=(3m)^3+2(3m)=3(9m^2+2m)$

$n=3m+1$ のとき，

$$\begin{aligned}n^3+2n&=(3m+1)^3+2(3m+1)\\&=3(9m^3+9m^2+5m+1)\end{aligned}$$

$n=3m+2$ のとき，

$$\begin{aligned}n^3+2n&=(3m+2)^3+2(3m+2)\\&=3(9m^3+18m^2+12m+4)\end{aligned}$$

よって，いずれの場合においても 3 の倍数になるので，任意の整数 n で n^3+2n は 3 の倍数である．

注　$n=3k$，$n=3k\pm1$ とすれば少しだけ計算がラクになります．

■

注　式変形でも 3 の倍数であることがわかります．

$$\begin{aligned}n^3+2n&=n(n^2+2)\\&=n(n^2-1+3)\\&=n(n^2-1)+3n\\&=n(n+1)(n-1)+3n\end{aligned}$$

$n(n-1)(n+1)$ は連続 3 整数の積なので 6 の倍数．また，$3n$ は 3 の倍数だから n^3+2n も 3 の倍数．■

例題 11．n を整数とするとき，$2n^3+3n^2+n$ は 6 の倍数であることを示せ．

考え方　6 の倍数であることを示すのだから，6 で割った余りで分類してもできますが，計算が結構大変になるのであまりおススメしません．言うまでもなく，6 の倍数とは 2 の倍数かつ 3 の倍数のことです．

解　$2n^3+3n^2+n=n(n+1)(2n+1)$ より，連続 2 整数の積 $n(n+1)$ を含むから，必ず 2 の倍数である．あとは，これが 3 の倍数でもあることを示せばよい．よって 3 で割った余りで分類する．

$n=3k$ のとき，n が 3 の倍数．

$n=3k+1$ のとき，$2n+1=6k+3$ より，$2n+1$ が 3 の倍数．

$n=3k+2$ のとき，$n+1=3k+3$ より，$n+1$ が 3 の倍数．

よって，$n(n+1)(2n+1)$ は 3 の倍数になる．

$\therefore\ 2n^3+3n^2+n$ は 6 の倍数である．

■

注　式変形でも 6 の倍数であることがわかります．

$$\begin{aligned}&n(n+1)(2n+1)\\=&n(n+1)(2(n-1)+3)\\=&2n(n+1)(n-1)+3n(n+1)\end{aligned}$$

$n(n-1)(n+1)$ は連続 3 整数の積なので 6 の倍数．また，$n(n+1)$ は連続する 2 整数の積なので 2 の倍数だから $3n(n+1)$ も 6 の倍数．

よって，$n(n+1)(2n+1)$ は 6 の倍数．■

例題 12．n が 3 以上の奇数のとき，n^3-n は 24 の倍数であることを示せ．

考え方　$n^3-n=n(n+1)(n-1)$ より連続 3 整数の積なので 6 の倍数であることは分かります．24 の倍数であることを示せばよいので「あとは 4 の倍数であればよいのね」と早合点してはいけません．6 の倍数かつ 4 の倍数は 12 の倍数であり，24 の倍数ではありません．

解　$n^3-n=n(n+1)(n-1)$ より連続 3 整数の積なので 3 の倍数である．

$n=2k+1$ とすると，

$(n+1)(n-1)=(2k+2)2k=4k(k+1)$.

$k(k+1)$ は連続 2 整数の積で 2 の倍数なので $4k(k+1)$ は 8 の倍数．よって，n^3-n も 8 の倍数である．従って，n^3-n は 24 の倍数である．

■

注　「(奇数)^2 は 8 で割ると 1 余る」のは有名事実です．

例題 **13**.　n が整数のとき，n^9-n^3 は 9 の倍数であることを示せ．

考え方 9 の倍数の証明だからといって 9 で割った余りで分類する必要はありません．この場合は 3 で割った余りで分類します．

解

$n^9-n^3=n^3(n^6-1)=n^3(n^3+1)(n^3-1)$

より，

$n=3k$ のときは n^2 が 9 の倍数になる．

$n=3k+1$ のときは n^3-1 が 9 の倍数になる．

$n=3k+2$ のときは n^3+1 が 9 の倍数になる．

以上より，任意の整数 n に対し n^9-n^3 は 9 で割り切れる．

■

4　素因数分解の一意性

▷Point◁(素因数分解の一意性)

1 以外の全ての自然数は，素数の積に分解できる．そのような分解の方法は，並べ方の順序を除いて，ただ一通りである．

素因数分解の一意性とは，簡単にいうと，**自然数はただ一通りに素因数分解できる**ということ．「な〜んだ，当たり前じゃないか」って感じですが，当たり前すぎてついつい忘れがちになってしまいます．

例題 **14**.　$2^m n-2^{m-1}=1000$ が成り立つとき，正の整数 m，n を求めよ．

解　$2^{m-1}(2n-1)=2^3\cdot5^3$．$2n-1$ は奇数だから 2 を素因数にもたないので，素因数分解の一意性より，

$2^{m-1}=2^3,\quad 2n-1=5^3.$

したがって，$m=4$，$n=63$.

■

例題 **15**.　p を自然数の定数とする．

$2^m-2^n=2^p$ をみたす 0 以上の整数 m，n を求めよ．

考え方 積の形に持ち込むことを考えます．m と n の大小に注目しよう．

解　$2^m-2^n=2^p>0$ より $m>n$ なので，左辺を 2^n でくくりだすと，

$2^n(2^{m-n}-1)=2^p$

$2^{m-n}-1$ は奇数だから，素因数分解の一意性より，

$2^n=2^p,\quad 2^{m-n}-1=1$

したがって，$m-n=1$，$n=p$ より，

$n=p$，$m=p+1$ と定まる．

■

素因数分解の一意性を利用すれば，これまで「背理法」の定番であった次の問題も，簡単に解決します．

例題 **16**.　$\sqrt{2}$ が無理数であることを，素因数分解の一意性を利用して証明せよ．

解　$\sqrt{2}$ が有理数だと仮定し $\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$(m，n は互いに素) とおけば，$2m^2=n^2$ となる．両辺の素因数 2 の個数に着目すると，左辺が奇数個，右辺が偶数個なので矛盾．

■

5　具体例で実験する

整数問題では具体例を考えることがとても大切です．とにかく具体的に整数を当てはめて実験（計算）し，規則性や法則を予想するのです．単なる式

変形では絶対に無理なので，

具体例で実験 $\Longrightarrow$ 法則を予想 $\Longrightarrow$ 証明

という流れをつねに意識しておこう．

例えば，次の問題はいかにもムツカシそうな感じがしますが，具体例で実験をすれば証明の方針が立ってきます．

例題 17.　p を 5 以上の素数とするとき，p^2+2 は必ず合成数になることを証明せよ．

考え方　まずは，p にいろいろな素数を代入して実験してみよう．

p	5	7	11	13	17	19	$\cdots$
p^2+2	27	51	123	172	251	363	$\cdots$

「合成数になる」ということは「ある数の倍数になる」ということだから，表をじっくりと見て，ある数の倍数になっていないかどうかを考えよう．すると，それらが全て 3 の倍数になっていることに気づくはず．つまり，この問題は，「p を 5 以上の素数とするとき，p^2+2 は必ず 3 の倍数になることを証明せよ.」という問題になります．

解　5 以上の素数は，3 で割って余りが 1 の素数と余りが 2 の素数に分かれる．

$p=3m+1$ のとき，

$p^2+2=(3m+1)^2+2=3(3m^2+2m+1)$

$p=3m+2$ のとき，

$p^2+2=(3m+2)^2+2=3(3m^2+2m+2)$

だから，いずれの場合も 3 の倍数になっているので，p^2+2 は合成数である．

■

例題 18.　n を自然数とする．
整数 $a_n=19^n+(-1)^{n-1}2^{4n-3}$ の全てを割りきる素数を求めよ．

考え方　僕が高校時代に解いた印象的な問題です (1986 年東工大)．「素数を見つける」なんていかにも難しそうですが，高校生が見つけられる素数は身近なところに転がっているはず．まずは n にいろいろ代入すればその素数が何なのかすぐに分かります．

$a_1=19+2=21=3\times7$

$a_2=19^2-2^5=329=7\times47$

となるので，a_n の全てを割り切る素数は 7 であると予想できます．よって「a_n が 7 で割り切れること」を証明すればよいのです．

証明方法は「数学的帰納法」を利用してください．各自でやっとこう．

注　合同式を使えばもっと簡単に証明できます．

例題 19.　正の整数の下 2 桁とは，100 の位以上の数字を無視した数をいう．たとえば 2000，12345 の下 2 桁はそれぞれ 0，45 である．m が正の整数全体を動くとき，$5m^2$ の下 2 桁として現れる数をすべて求めよ．

考え方　最後は東京大学の問題です (2007 年前期文系)．この問題文を読んでどう感じるでしょうか．「難しい」とか「無理だ」とは思わないでほしいです．僕なら「正の整数は無限個ある．無限個すべてを確認することは不可能だ．でも『すべて求めよ』と書いてある．ということは，何か規則性があるはずだ！」と考えます．と．そして，次にやることは，その規則性を発見するための実験．少なくとも $m=1\sim10$ くらいまでは実際に計算しないと駄目でしょう．

解　$m=10a+b$ (a，b は負でない整数で $0\leqq b\leqq9$) とおくと，

$$\begin{aligned}5m^4&=5(10a+b)^4\\&=5(10000a^4+4000a^3b+600a^2b^2+40ab^3+b^4)\\&=100(500a^4+200a^3b+30a^2b^2+2ab^3)+5b^4\end{aligned}$$

よって，$5m^4$ の下 2 桁は $5b^4$ の下 2 桁に等しい．

b	$5b^4$	$5b^4$ の下 2 桁
0	0	0
1	5	5
2	80	80
3	405	5
4	1280	80
5	3125	25
6	6480	80
7	12005	5
8	20480	80
9	32805	5

上の表より，答えは，0，5，25，80

■