解

$4x+9y=(3x+7y)\times1+(x+2y)$

$3x+7y=(x+2y)\times3+y$

$x+2y=y\times2+x$

したがって，ユークリッドの互除法より，$4x+9y$ と $3x+7y$ の最大公約数は，y と x の最大公約数に等しい．

実に美しい

x と y は互いに素なので，$4x+9y$ と $3x+7y$ も互いに素，すなわち $\dfrac{4x+9y}{3x+7y}$ は既約分数である．

■

注 (,) で表記すれば

$$\begin{aligned}(4x+9y,\ 3x+7y)&=(3x+7y,\ x+2y)\\&=(x+2y,\ y)\\&=(y,\ x)\end{aligned}$$

となります．とてもシンプルで見やすいですね．

次の問題は，整数問題が教育課程になかった時代 (つまりユークリッドの互除法など習っていない時代) の問題です．

例題 4.

(1) 自然数 $a,\ b,\ c,\ d$ に，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{a}+d$ の関係があるとき，a と c が互いに素ならば，a と b も互いに素であることを証明せよ．

(2) 任意の自然数 n に対し，$28n+5$ と $21n+4$ は互いに素であることを証明せよ．

[2000年大阪市大前期理系]

市大でもこんなん出てたんか

フ〜ン

考え方 今の時代なら，(1) はユークリッドの互除法より明らかです．なぜなら，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{a}+d$ より，$b=ad+c$ で，これは，b を a で割ったら商が d，余りが c であることを意味しており，ユークリッドの互除法により，b と a の最大公約数は a と c の最大公約数に等しいので，a と c が互いに素ならば，a と b も互いに素だからです．しかし「ユークリッドの互除法より明らか」と解答するわけにもいかないのできちんと証明しましょう．

(2) は，(1) の結果を利用しますが，この問題もユークリッドの互除法の意識があると解決が早いですね．

解 (1) $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{a}+d$ より，$b-ad=c$.

a と b が互いに素でないと仮定すると，a と b に共通の素因数 p が存在するので，$b-ad$ は p で割り切れる．よって，c も p で割り切れることになるので，a と c も互いに素ではない．

よって対偶命題が証明されたので，元の命題は正しい．

(2) $\dfrac{28n+5}{21n+4}=\dfrac{7n+1}{21n+4}+1$ … ①

であり，さらに，

$\dfrac{21n+4}{7n+1}=\dfrac{1}{7n+1}+3$ … ②

となる．

② より，$7n+1$ と 1 は互いに素だから，(1) より，$21n+4$ と $7n+1$ も互いに素である．

よって，① より，$21n+4$ と $7n+1$ は互いに素だから，(1) より，$21n+4$ と $28n+5$ も互いに素である．

■

注 今の時代なら (2) がいきなり出題されるかもしれません．その場合は次のような解答になるでしょう．

別解

$28n+5=(21n+4)\times1+7n+1$

$21n+4=(7n+1)\times3+1$

したがって，ユークリッドの互除法より，$21n+4$ と $28n+5$ の最大公約数は，$7n+1$ と 1 の最大公約数に等しい．

$7n+1$ と 1 は互いに素なので，$21n+4$ と $28n+5$ も互いに素である．

■

注 (,) で表記すれば

$$(28n+5,\ 21n+4)=(21n+4,\ 7n+1)=(7n+1,\ 1)$$

となります．とてもシンプルで見やすいですね．

次の問題は，某予備校の模擬試験の問題です．本校の生徒も出来がかなり悪かった問題です．

そーやった そーやった

例題 5. x,y の方程式 $7x-4y=6$ … (*) がある

(1) (*) を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を 1 つ求めよ．

(2) (*) を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(3) (*) を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ を考え

る．x と y が互いに素となる組のうち，x の値が小さいほうから 100 番目の組 $(x,\ y)$ を求めよ．

［2015 年 K 塾第 2 回全統記述模試］

考え方　(1)(2) は問題ないと思います．(3) が全然お手上げだったようで残念でなりません．「100 番目を求めよ」なんて聞かれるということは絶対に何らかの規則性があるはずです．少なくともイロイロ実験して結論を予想することくらいはできてほしいです．予想できればあとは証明です．

解　(1) $(x,\ y)=(2,\ 2)$

(2) (1) より $(x,\ y)=(2,\ 2)$ が 1 組の解なので

$$\begin{array}{rcl} 7\times x-4\times y &=& 6 \\ 7\times 2-4\times 2 &=& 6 \\ \hline \end{array}$$

辺々を引いて，$7(x-2)-4(y-2)=0$.

$\therefore\ 7(x-2)=4(y-2)$

必ず確認する → 7 と 4 は互いに素なので，$x-2$ が 4 で割り切れる．

つまり，$x-2=4k$ とおけ，従って $y-2=7k$ となる．

以上より，$7x-4y=6$ の一般解は

$$(x,\ y)=(2+4k,\ 2+7k)\ (k \text{ は整数})$$

となる．

(3) (2) より k に順番に整数を代入してみると

k	x	y	互いに素かどうか
0	2	2	×
1	6	9	×
2	10	16	×
3	14	23	○
4	18	30	×
5	22	37	○
6	26	44	×
7	30	51	×
8	34	58	×
9	38	65	○
10	42	72	×
11	46	79	○
12	50	86	×
13	54	93	×

規則性がないか
じっと見る

じ〜っ

この結果から，k が 6 で割って余りが 3 または 5 のときに x と y が互いに素になっていることがわかる．この予想が正しいことを証明する．

$(x,\ y)=(2+4k,\ 2+7k)$ において，

(i) $k=6k,\ 6k+2,\ 6k+4$ のとき．

x も y も共に偶数になるので互いに素にはならない．

(ii) $k=6k+1$ のとき．

$x=2+4(6k+1)=24k+6=3(8k+2)$

$y=2+7(6k+1)=42k+9=3(14k+3)$

よって，x も y も共に 3 の倍数になるので互いに素にはならない．

(iii) $k=6k+3$ のとき．

$x=2+4(6k+3)=24k+14$

$y=2+7(6k+3)=42k+23$

$$\begin{aligned}(y,\ x)&=(42k+23,\ 24k+14)\\&=(24k+14,\ 18k+9)\\&=(18k+9,\ 6k+5)\\&=(6k+5,\ 12k+4)\\&=(12k+4,\ 6k+5)\\&=(6k+5,\ 6k-1)\\&=(6k-1,\ 6)\end{aligned}$$

ユークリッドの互除法

$k=0$ のとき $6k-1<0$ なので厳密にはちょっとマズい．($k\geqq1$) でもまぁいい。

x と y の最大公約数は，$6k-1$ と 6 の公約数に等しいが，$6k-1$ は 6 で割り切れないので，$6k-1$ と 6 の公約数は 1，つまり，x と y は互いに素である．

(iv) $k=6k+5$ のとき．

$x=2+4(6k+5)=24k+22$

$y=2+7(6k+5)=42k+37$

$$\begin{aligned}(y,\ x)&=(42k+37,\ 24k+22)\\&=(24k+22,\ 18k+15)\\&=(18k+15,\ 6k+7)\\&=(6k+7,\ 6k+1)\\&=(6k+1,\ 6)\end{aligned}$$

ユークリッドの互除法

x と y の最大公約数は，$6k+1$ と 6 の公約数に等しいが，$6k+1$ は 6 で割り切れないので，$6k+1$ と 6 の公約数は 1，つまり，x と y は互いに素である．

以上より，k が 6 で割って余りが 3 または 5 のときに x と y が互いに素である．

したがって，100 番目の組は k が 6 で割って 5 余る数の 50 番目に相当するので，

$k=5+6(50-1)=299$.

このとき，$(x,\ y)=(1198,\ 2095)$

■

「ユークリッドの互除法」って，単に最大公約数を求めるだけじゃないのネ　奥が深い!!