ユークリッドの互除法入門

手ごろな大きさの 2 つの自然数の最大公約数は，素因数分解すればすぐに分かりますが，ある程度以上の大きさになれば素因数分解が思いつかなくなり，困ってしまいます．そんなときに有効なのが『ユークリッドの互除法』です．

▷Point◁(☆ユークリッドの互除法☆)

> 2 つの自然数 a，b について，a を b で割ったときの余りを r とすれば a と b の最大公約数と b と r の最大公約数は一致する．

授業では，「長方形をなるべく大きい正方形の敷き詰める」というアイデアで説明しましたが，いちおうきちんと証明しておきましょう．やや難しい証明になっていますが，重要な手法なのでじっくり読んで理解してください．

証明

a と b の最大公約数を g とするとき，

$$a = ga', \quad b = gb' \ (a' \text{と} b' \text{は互いに素})$$

とおける．いま，a を b で割ったとき，商が q，余りが r になったとすると，

$$a = bq + r \quad (0 \leqq r < b)$$

となる．このとき，

$$\begin{aligned} r &= a - bq \\ &= ga' - gb'q \\ &= g(a' - b'q) \end{aligned}$$

よって，$b = gb'$ と $r = g(a' - b'q)$ の最大公約数も g になるためには，b' と $a' - b'q$ が互いに素であればよい．

いま，b' と $a' - b'q$ が互いに素でないと仮定すると，b' も $a' - b'q$ も共通の素因数 p で割り切れる．つまり，

$$b' = p\alpha, \quad a' - b'q = p\beta$$

このとき，$a' = p\beta + b'q = p\beta + p\alpha q = p(\beta + \alpha q)$ より，a' も p で割り切れる．よって，a' も b' も p で割り切れることになり，a' と b' が互いに素であることに矛盾する．

よって b' と $a' - b'q$ が互いに素であるので，$b = gb'$ と $r = g(a' - b'q)$ の最大公約数も g である．

つまり，a と b の最大公約数と b と r の最大公約数は一致する．

■

注　一般に，a と b の最大公約数を $(a,\ b)$ と表記します．例えば $(8,\ 12) = 4$，$(5,\ 7) = 1$ などなど．座標と混同しないように注意してください．

この表記方法を用いると，ユークリッドの互除法とは

$$a = bq + r \quad (0 \leqq r < b)$$

$\Longrightarrow$「a と b の最大公約数」と「b と r の最大公約数」は同じ

$$\Longrightarrow (a,\ b) = (b,\ r)$$

とシンプルに表記できます．

とにかく具体例を通して慣れよう．

> 【例】　943 と 1058 の最大公約数

解　ユークリッドの互除法より

$$\begin{aligned} 1058 &= 943 \times 1 + 115 \quad \cdots\cdots① \\ 943 &= 115 \times 8 + 23 \quad \cdots\cdots② \\ 115 &= 23 \times 5 \end{aligned}$$

よって，最大公約数は 23 である．

■

式 ① は「1058 と 943 の最大公約数は 943 と 115 の最大公約数に等しい」ことを意味しており，式 ② は「943 と 115 の最大公約数は 115 と 23 の最大公約数に等しい」ことを意味しています．ここまでくれば $115 = 23 \times 5$ より，115 と 23 の最大公約数が 23 になることが分かるので，943 と 1058 の最大公約数は 23 になります．

このように，大きな 2 数に割り算を繰り返し，どんどん数を小さくしてから最大公約数を求める方法が『ユークリッドの互除法』です．

順番に割り算を続けていけば，自然に最大公約数がポロッと出てくるのですが，計算式を書くのがメンドウで間違えやすいので，次のように筆算で書くと間違いが少なく，スッキリと求めることができます．

まずは，最初の割り算 1058 ÷ 943 を筆算で計算します．

	1
943)	1058
	943
	115

余り 115 を 943 の左側に書いて，引き続き，943 ÷ 115 を筆算で計算します．

	8	1
115)	943)	1058
	920	943
	23	115

余り 23 を 115 の左側に書いて，引き続き，115 ÷ 23 を筆算で計算します．

	5	8	1
23)	115)	943)	1058
	115	920	943
	0	23	115

最終的に余りが 0 になれば終了です．一番左端の数 23 が最大公約数です．

注　『ユークリッドの互除法』の表記方法は他にもイロイロあるようですが，この筆算方式が，一番分かりやすいと思うので，ぜひともマスターして欲しいところです．

【例】　323 と 884 の最大公約数

	4	1	2	1	2
17)	68)	85)	238)	323)	884
	68	68	170	238	646
	0	17	68	85	238

よって，最大公約数は 17 である．

■

答えだけでよければ，このように筆算で十分ですが，テストなどで出題された場合は，途中の計算式もきちんと書いておくべきです．

【例】　3059 と 2337 の最大公約数

【例】　2531 と 1709 の最大公約数

解

(1)　ユークリッドの互除法より

$$\begin{aligned}
3059 &= 2337 \times 1 + 722 \\
2337 &= 722 \times 3 + 171 \\
722 &= 171 \times 4 + 38 \\
171 &= 38 \times 4 + 19 \\
38 &= 19 \times 2
\end{aligned}$$

よって，3059 と 2337 の最大公約数は 19 である．

■

注　筆算で書くと以下のようになります．

	2	4	4	3	1
19)	38)	171)	722)	2337)	3059
	19	142	684	2166	2337
	0	19	38	171	722

(2)　ユークリッドの互除法より

$$\begin{aligned}
2531 &= 1709 \times 1 + 822 \\
1709 &= 822 \times 2 + 65 \\
822 &= 65 \times 12 + 42 \\
65 &= 42 \times 1 + 23 \\
42 &= 23 \times 1 + 19 \\
23 &= 19 \times 1 + 4 \\
19 &= 4 \times 4 + 3 \\
4 &= 3 \times 1 + 1 \\
3 &= 1 \times 3
\end{aligned}$$

よって，2531 と 1709 の最大公約数は 1 である．

■

注　2531 と 1709 の最大公約数が 1 ということは，2531 と 1709 が互いに素であることを意味しています．なお，筆算で書くのは (結構ヨコに長くなるので) 省略します．各自でやっとてください．

注　実のところ，最後まで計算しなくても，途中で最大公約数が分かってしまいます．たとえば (2) の場合，3 行目の式より，求める最大公約数は「65 と 42 の最大公約数」に等しいので，この時点で「最大公約数は 1」であることが判明してしまいます．しかし，必ず最後まで計算してください．最後まで計算することが，後に学習する「1 次不定方程式の解法」で重要な意味を持ってくるからです．