平方数の分類

知っているととても便利な考え方ですよ

整数全体は，ある数で割ったときの余りによって均等に分類されます．例えば3で割った余りに注目すると，余りが0，1，2の3つのグループに分類されます．

しかし，平方数（1，4，9，16，25，…）に限って考えると，その分類はかなり特徴的なものになります．

平方数を3，4，5，8で割った余りについて下の表にまとめてみよう．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n^2 を3で割った余り	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1
n^2 を4で割った余り	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
n^2 を5で割った余り	1	4	4	1	0	1	4	4	1	0
n^2 を8で割った余り	1	4	1	0	1	4	1	0	1	4

特定の数字が規則的に表れています。

何か秘密がありそう…

ムムム…

この表から次のことがわかります．

> 平方数を3で割った余りは，0か1である．
> 平方数を4で割った余りは，0か1である．
> 平方数を5で割った余りは，0か1か4である．
> 平方数を8で割った余りは，0か1か4である．

このように平方数を3，4，5，8割った余りは極めて特徴的です．

したがって，次のような式は全て<u>あり得ない</u>ので矛盾です．m，n を整数とするとき，

$m^2 = 3n + 2 \implies$ 矛盾

（平方数を3で割って余り2にはならないから．）

フムフム

$m^2 = 4n + 3 \implies$ 矛盾

（平方数を4で割って余り3にはならないから．）

なるほど〜

1　平方数の3，5による分類

▷Point◁（平方数を3で割った余り）

n が3で割り切れるとき，
　　n^2 を3で割ると余り0
n が3で割り切れないとき，
　　n^2 を3で割ると余り1

証明

$n \equiv 0 \pmod{3}$ のとき，$n^2 \equiv 0 \pmod{3}$

$n \equiv \pm 1 \pmod{3}$ のとき，

$$n^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

■

合同式を使うととても簡単に証明できます

カンターン

✎**注**　合同式を用いないなら次のようになります．

$n = 3k$ のとき，$n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3 \cdot 3k^2$ となり，n^2 は3で割り切れる．

$n = 3k \pm 1$ のとき，

$$\begin{aligned} n^2 = (3k \pm 1)^2 &= 9k^2 \pm 6k + 1 \\ &= 3(3k^2 \pm 2k) + 1 \end{aligned}$$

となり，n^2 は3で割ると1余る．

（$n = 3k$，$3k+1$，$3k+2$ としても構いません）

■

合同式を使わなくても大したことないネ

うん

✎**注**　逆も成立します．つまり，

n^2 を3で割ると余り0 $\Longrightarrow$ n が3で割り切れる

n^2 を3で割ると余り1 $\Longrightarrow$ n が3で割り切れない

「対偶」を考えれば簡単に証明できます．

▷Point◁（平方数を5で割った余り）

n が5で割り切れるとき，
　　n^2 を5で割ると余り0
n を5で割って余りが1または4のとき，
　　n^2 を5で割ると余り1
n を5で割って余りが2または3のとき，
　　n^2 を5で割ると余り4

証明

$n \equiv 0 \pmod{5}$ のとき，$n^2 \equiv 0 \pmod{5}$

$n \equiv \pm 1 \pmod{5}$ のとき，$n^2 \equiv 1 \pmod{5}$

$n \equiv \pm 2 \pmod{5}$ のとき，$n^2 \equiv 4 \pmod{5}$

■

これもカンタン

OK

✎**注**　合同式を用いないなら，$n = 5k$，$5k \pm 1$，

$5k \pm 2$ として n^2 に代入して計算します ($n = 5k$, $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$, $5k + 4$ としても構いません). 3 で割った場合と全く同じなので, 各自でやっといてください.

2　平方数の 4, 8 による分類

▷Point◁(平方数を 4 で割った余り)

> n が偶数のとき, n^2 を 4 で割ると余り 0
> n が奇数のとき, n^2 を 4 で割ると余り 1

証明

今回は合同式は使いません
↓
その方がカンタン

$n = 2k$ のとき, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$ となり, n^2 は 4 で割り切れる.

$n = 2k + 1$ のとき,

$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

となり, n^2 は 4 で割ると 1 余る.

■

▷Point◁(平方数を 8 で割った余り)

> n が 4 で割り切れるとき,
> 　n^2 を 8 で割ると余り 0
> n を 4 で割ると 2 余るとき,
> 　n^2 を 8 で割ると余り 4
> n が奇数 (つまり n を 4 で割ると余り 1, 3) のとき,
> 　n^2 を 8 で割ると余り 1

証明

$n = 4k$ のとき, $n^2 = (4k)^2 = 16k^2 = 8 \cdot 2k^2$ となり, n^2 は 8 で割り切れる.

今回も合同式は使いません
↓
その方がカンタン

$n = 4k + 2$ のとき,

$$n^2 = (4k + 2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 8(2k^2 + 2k) + 4$$

となり, n^2 は 8 で割ると 4 余る.

$n = 2k + 1$ のとき,

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$$

$k(k + 1)$ は連続する 2 整数の積だから偶数. つまり, $4k(k + 1)$ は 8 の倍数となり, n^2 は 8 で割ると 1 余る.

■

注　特に最後の結果

$$(\text{奇数})^2 \text{は} 8 \text{で割ると余りが} 1 \text{である}$$

は, かなり頻繁に登場するので, これはこれで単独で覚えておいたほうが良いでしょう.

最後にもう一度, 平方数の分類をまとめておこう.

▷Point◁(平方数の分類)

> 平方数を 3 で割った余りは, 0 か 1 である.
> 平方数を 4 で割った余りは, 0 か 1 である.
> 平方数を 5 で割った余りは, 0 か 1 か 4 である.
> 平方数を 8 で割った余りは, 0 か 1 か 4 である.

この『平方数の分類』は, 知っていると証明の見通しが立ってとても便利なので, まずは結果を覚えてください. なお, 入試では証明なしで用いることは避けたほうが良いでしょう. そんなに大変な証明じゃないので, いつでもすぐにできるようにしておこう.


はーい

3　入試問題紹介

『平方数の分類』をテーマにした入試問題の中から有名な問題を紹介します. なお,『平方数の分類』を知っているものとして解答していますが, 実際にはちゃんと証明してから使ってください. 証明なしで使うと必ず減点されると思います.

例題 **1.**　$x^2 - 5y = 2$ をみたす整数 x, y が存在しないことを証明せよ.

考え方　これは入試問題ではなく, 某大学の実戦模試の問題です. 当時, 担任してた生徒がこの模試を受けて「どうやって証明するか全く分からなかった」と嘆いてましたが, 僕は一見して「えっ, アタリマエやろ」と思いました. みなさんもそう思えるようになってほしいです.

解　$x^2 - 5y = 2$ より, $x^2 = 5y + 2$ これは平方数 x^2 を 5 で割ると余りが 2 になることを表しているが,『平方数の分類』より, 平方数を 5 で割った余りは 0 か 1 か 4 に限られるので, 矛盾. よって, 与式をみたす整数 x, y は存在しない.

■