例題 2.　自然数 P が 2 でも 3 でも割り切れないとき，P^2-1 は 24 で割り切れることを示せ．

考え方　「2 でも 3 でも割り切れない」とは「$P=6k+1$ または $P=6k+5$」の場合になるので，これを代入しても考えても良いのですがかえってメンドウです．

解

P が 2 の倍数でない (つまり奇数) とき，P^2 は 8 で割ると余り 1 なので，P^2-1 は 8 で割り切れる．

P が 3 の倍数でないとき，P^2 は 3 で割ると余り 1 なので，P^2-1 は 3 で割り切れる．

よって，P^2-1 は 3 でも 8 でも割り切れるので 24 の倍数である．

とてもシンプルで美しい解答

■

注　この問題で次のように考えた人はいませんか．

「$P^2-1=(P+1)(P-1)$．P が奇数なので $P-1$ と $P+1$ は共に偶数．よって P^2-1 は 4 の倍数．したがって 24 の倍数になるにはさらに 6 の倍数になることを示せばよい・・・・」

何がマズイか分かるでしょう．4 の倍数かつ 6 の倍数は 24 の倍数ではないからです (正しくは 12 の倍数)．

例題 3.　a，b，c はどの 2 つも 1 以外の共通な約数をもたない正の整数とする．a，b，c が，$a^2+b^2=c^2$ をみたしているとき，c は奇数であることを証明せよ．

考え方　a，b，c はどの 2 つも 1 以外の共通な約数をもたない正の整数だから a，b が共に偶数になることはありません．

解　c が偶数だと仮定すると，a，b，c はどの 2 つも 1 以外の共通な約数をもたない正の整数だから a，b は共に奇数でなければならない．このとき，『平方数の分類』より a^2，b^2 はそれぞれ 4 で割ると 1 余るので，a^2+b^2 は 4 で割ると 2 余る．c^2 を 4 で割った余りは 0 なので，$a^2+b^2 \neq c^2$ となり矛盾する．c は奇数である．

4でわった余りに注目するのか…

フムフム

■

例題 4.　自然数 a，b，c が $a^2+b^2=c^2$ を満たすとき，
(1) a，b のうち少なくとも 1 つは 3 の倍数があることを示せ．
(2) a，b，c のうち少なくとも 1 つは 5 の倍数があることを示せ．

とても有名で重要な問題です

考え方　当然ながら背理法です．

解　(1) a も b も 3 の倍数でないとすると，a^2，b^2 を 3 で割った余りはそれぞれ 1 なので，a^2+b^2 を 3 で割った余りは 2 である．

また，平方数 c^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 なので，$a^2+b^2 \neq c^2$ となり矛盾する．

よって，a，b のうち少なくとも 1 つは 3 の倍数である．

(2)　a，b，c がすべて 5 の倍数でないとすると，a^2，b^2，c^2 を 5 で割った余りは 1 か 4 である．a^2+b^2 を 5 で割った余りは，$1+1$ か $1+4$ か $4+4$ を 5 で割った余り，すなわち，2 か 0 か 3 なので，$a^2+b^2 \neq c^2$ となり矛盾する．

よって，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 5 の倍数である．

ここでも両辺の3又は5で割った余りに注目しています

なぜ矛盾するのかその理由をしっかり考えよう

OK

■

例題 5.　直角三角形の 3 辺の長さがすべて整数のとき，面積は 2 の整数倍であることを示せ．

ちょっと雰囲気がちがう

アレ？

考え方　直角を挟む 2 辺を a，b とすれば $S=\dfrac{1}{2}ab$ なので，これが 2 の整数倍になるには ab が 4 の倍数にならねばなりません．つまり，a，b が共に偶数になるか，どちらか一方が 4 の倍数になれば良いのです．

解　直角三角形の 3 辺を a，b，c とし，c を斜辺とする．このとき，三角形の面積 S は $S=\dfrac{1}{2}ab$ となる．

まず，$a^2+b^2=c^2$ より，a，b が共に奇数になることはない．なぜならば，共に奇数だと，『平方数の分類』より a も b も 4 で割ると 1 余るので，

a^2+b^2 は4で割ると2余る．平方数を4で割った余りは0か1なので $a^2+b^2 \neq c^2$ となり矛盾する．よって，ともに偶数か，一方が偶数で他方が奇数．

きちんと場合分けしよう。

(i) a, b が共に偶数のとき．

ab は4の倍数になるので $S=\dfrac{1}{2}ab$ は2の整数倍である．

(ii) a, b のうち，一方は偶数で，他方は奇数のとき．

しっかり考えよう

a を偶数，b を奇数として一般性を失わない．いま a が4の倍数でないとすると，$a=4k+2$ とおけ，$a^2=(4k+2)^2=16k^2+16k+4$ となるので，a^2 は8で割ると4余る．

やっぱり割った余りに注目しています

また，『平方数の分類』より，奇数の平方数は8で割ると1余るから，b と c は共に奇数なので，b^2 と c^2 を8で割った余りは1．$a^2+b^2 \neq c^2$ となり矛盾する．したがって，a は4の倍数になるので，$S=\dfrac{1}{2}ab$ は2の整数倍である．

以上より，$S=\dfrac{1}{2}ab$ は2の整数倍である．

■

例題 6.　整数 a, b, c, d が等式 $a^2+b^2+c^2=d^2$ をみたすとする．

(1) d が3の倍数でないならば，a, b, c の中に3の倍数がちょうど2つあることを示せ．

これはちょっとムズい

(2) d が2の倍数でも3の倍数でもないならば，a, b, c のうち少なくとも1つは6の倍数であることを示せ．

考え方 (1) 背理法を利用します．a, b, c の中に3の倍数が3個，1個，0個ある場合に矛盾が生じることを示す．

(2) なかなか難しい．d が2の倍数でも3の倍数でもないから，$d=6k\pm1$ とおいて，背理法です．この問題では何で割った余りに注目すればよいのでしょうか．ここが最大のポイントです．

解 (1)　d は3の倍数ではないので，『平方数の分類』より，d^2 は3で割ると1余る．

文字が1つ増えただけで考え方はこれまでと同じ

(i) a, b, c がすべて3の倍数であるとき．

『平方数の分類』より，a^2, b^2, c^2 はすべて3で割り切れるので，$a^2+b^2+c^2$ も3で割り切れる．d^2 は3で割ると1余るから矛盾．

(ii) a, b, c の中に3の倍数が1個あるとき．

文字が1つ増えただけで考え方はこれまでと同じ

『平方数の分類』より，a^2, b^2, c^2 はそのうち1つが3で割り切れ，残りの2つは3で割ると1余るので，$a^2+b^2+c^2$ は3で割ると2余る．d^2 は3で割ると1余るから矛盾．　(iii) a, b, c がすべて3の倍数でないとき．

『平方数の分類』より，a^2, b^2, c^2 はすべて3で割ると1余るので，$a^2+b^2+c^2$ は3で割ると3余る，つまり3で割り切れる．d^2 は3で割ると1余るから矛盾．

うん…

以上より，a, b, c の中に3の倍数がちょうど2つある．

(2) (1)より，a, b, c の中に3の倍数がちょうど2つあるので，$a=3l$, $b=3m$, $c=3n\pm1$ と表しても一般性を失わない．このとき，6の倍数になる可能性があるのは a または b である．よって，a, b ともに6の倍数でないと仮定すると，l, m はともに奇数になるので $l=2p+1$, $m=2q+1$ とおけ，$a=6p+3$, $b=6q+3$ となる．また，d が2の倍数でも3の倍数でもないから $d=6k\pm1$ とおける．

このとき，

$$
\begin{aligned}
c^2 &= d^2-a^2-b^2\\
&=(6k\pm1)^2-(6p+3)^2-(6q+3)^2\\
&=36k^2\pm12k+1-36p^2-36p-9-36q^2-36q-9\\
&=12(6k^2\pm1-3p^2-3p-3q^2-3q-2)+7
\end{aligned}
$$

なので，c^2 は12で割ると7余る．一方，

$$
\begin{aligned}
c^2 &= (3n\pm1)^2\\
&=9n^2\pm6n+1\\
&=6n(n\pm1)+3n^2+1
\end{aligned}
$$

$n(n\pm1)$ は連続2整数の積なので偶数．よって $6n(n\pm1)$ は12で割り切れるので，c^2 を12で割った余りは $3n^2+1$ を12で割った余りに一致する．しかし『平方数の分類』より，n^2 を4で割った余りは0か1にしかならないから $3n^2+1$ を12で割った余りは1か4に限られるので矛盾である．

よって，a, b, c のうち少なくとも1つは6の倍数である

■

注　一番最後の部分ですが，$n^2=4k$, $4k+1$ として $3n^2+1$ に代入すればわかると思います．