証明

a, b が互いに素であるとき，**定理①** より，

$$ax + by = 1$$

となる整数 x, y が存在する．このとき，任意の整数 c に対して，両辺を c 倍すると，

$$a(cx) + b(cy) = c$$

が得られる．

■

さて，以上の内容をテーマにした入試問題を 3 問紹介しよう．いずれもかなりの高難度です．

例題　p, q を互いに素な正整数とする．

(1) 任意の整数 x に対して，p 個の整数

$$x-q,\ x-2q,\ \cdots,\ x-pq$$

を p で割った余りは全て相異なることを証明せよ．

(2) $x > pq$ なる任意の整数 x は，適当な正整数 a, b を用いて $x = pa + qb$ と表せることを証明せよ．

［2008 年奈良県立医大前期］

基本定理と
雰囲気が
似てる…

たしかに

考え方　この問題は基本定理の証明の流れそのままです．(2) は，$x = pa + qb$ より $x - bq = pa$ だから，$x - bq$ が p で割り切れることを意味しています．このことと (1) との関係が読み取れるでしょうか．

解　(1)　背理法で証明する．

$x - kq$ と $x - lq\,(1 \leqq k < l \leqq p)$ を p で割った余りが等しいとすると，

$$x - kq = p\alpha + r$$
$$x - lq = p\beta + r$$

$$\therefore\ (l-k)q = p(\alpha - \beta)$$

p と q が互いに素なので，$l-k$ は p の倍数である．ところが，$1 \leqq k < l \leqq p$ より，$1 \leqq l-k \leqq p-1$ だから，$l-k$ は p の倍数にはならない．よって，矛盾．

さっきと
ほとんど同じ〜

したがって，p 個の数

$$x-q,\ x-2q,\ \cdots,\ x-pq$$

を p で割った余りは全て異なる．

(2) $x > pq$ より p 個の整数

$$x-q,\ x-2q,\ \cdots,\ x-pq$$

は全て正の整数である．

(1) より，これらを p で割った余りは全て異なり，その余りは p 個の整数 0, 1, $\cdots$, $p-1$ のいずれかであることから，p で割って余りが 0 であるものが必ず 1 つ存在する．

とても
重要な
ポイント
です

このときの k を b とし，p で割ったときの商を a とすれば，

$$x - bq = pa$$

となる．すなわち，$x = pa + qb$ となる正整数 a, b が存在する．

よって，題意は証明された．

■

例題　0 以上の整数 x に対して，$C(x)$ で x の下 2 桁を表すことにする．例えば，$C(12578) = 78$, $C(6) = 6$ である．n を 2 でも 5 でも割り切れない正の整数とする．

(1) x, y が 0 以上の整数のとき，
$C(nx) = C(ny)$ ならば，
$C(x) = C(y)$ であることを示せ．

(2) $C(nx) = 1$ となる 0 以上の整数 x が存在することを示せ．

［1999 年京都大前期文系］

考え方　(1) は

「2 つの数の下 2 桁が等しい」
$\Longleftrightarrow$「2 つの数の差は 100 で割り切れる」

このことに気づけば問題ないでしょう．(2) は典型的な「存在証明」です．$C(x)$ は x に下 2 桁なので 0 から 99 の 100 個の値しか取りえないことに注目しよう．

大筋で基本定理の証明方法と同じなのですが，なかなか気付きにくいと思います．文系にとっては少々酷な問題ですね．

理系でも
ムリやわ…

解 (1)

$$C(nx)=C(ny)$$
$\Longleftrightarrow nx$ と ny の下 2 桁が等しい
$\Longleftrightarrow nx-ny$ が 100 で割り切れる
$\Longleftrightarrow n(x-y)$ が 100 で割り切れる

n は 2 でも 5 でも割り切れない数なので，n は 100 で割り切れない．よって，$x-y$ が 100 で割り切れることになり，x と y の下 2 桁の数は等しい．

$\therefore\ C(x)=C(y)$

(2) 100 個の数

そもそもこれらを考えようと思うかどうか

これがポイント

$$C(n\cdot 0),\ C(n\cdot 1),\ \cdots,\ C(n\cdot 99)$$

を考えると，これらはすべて異なる．なぜならば，$0\leqq i<j\leqq 99$ なる整数 i, j に対し，$C(ni)=C(nj)$ とすると，(1) より，$C(i)=C(j)$ となり，$i=j$ となるので矛盾するからである．

したがって，

$$C(n\cdot 0),\ C(n\cdot 1),\ \cdots,\ C(n\cdot 99)$$

の中に，0 から 99 までの数が 1 回ずつ現れるので，$C(nx)=1$ となる 0 以上の整数 x が存在する．

■

これはムズイ

例題 xy 平面上，x 座標，y 座標がともに整数であるような点 $(m,\ n)$ を格子点とよぶ．各格子点を中心として半径 r の円がえがかれており，傾き $\dfrac{2}{5}$ の任意の直線はこれらの円のどれかと共有点をもつという．このような性質をもつ実数 r の最小値を求めよ．

［1991 年東京大前期理系］

考え方 まず問題の意味わかりますか．要するに，格子点を中心とする半径 r の円がいっぱいあって，傾き $\dfrac{2}{5}$ のどんな直線でも，どれかの円と必ず交わるための r の条件を求めよ，ということ．半径がそこそこ大きければ直線と必ず交わるでしょうし，逆に半径が小さすぎると，直線が円と円の隙間を縫うように進んで，全く交わらないかもしれません．

そうなる半径 r の限界値（つまり最小値）を求めよということです．

ポイントは，$\boxed{\text{定理 ②}}$ です．これを知らないとキツイでしょう．

解 傾きが $\dfrac{2}{5}$ の直線 $2x-5y-a=0$ を l_a とする．l_a に最も近い格子点と l_a との距離を d_a とすると，l_a と共有点をもつ円が存在する条件は

$$r\geqq d_a$$

これが任意の a で成立するための条件は，d_a の最大値を M とすると，$r\geqq M$ である．

格子点 $(m,\ n)$ と l_a との距離は

$$\frac{|2m-5n-a|}{\sqrt{2^2+(-5)^2}}=\frac{|2m-5n-a|}{\sqrt{29}}$$

ポイント

ここで，$2m-5n$ はすべての整数値をとることができる．なぜならば，任意の整数 k に対して，$m=3k$, $n=k$ とおけば，$2(3k)-5(k)=k$ となるからである．

したがって，a にもっとも近い整数を N とすれば，$d_a=\dfrac{|N-a|}{\sqrt{29}}$ なので，

$$r\geqq\frac{|N-a|}{\sqrt{29}}\quad\cdots(※)$$

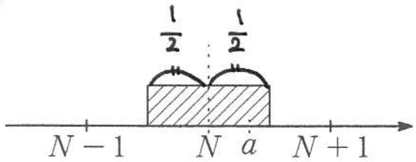
$|N-a|\leqq\dfrac{1}{2}$ より，任意の実数 a に対して，(※) が成立するための r の条件は，

$$r\geqq\frac{1}{2\sqrt{29}}$$

よって，求める r の最小値は $r=\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$ である．

■

注 解答の意味わかりますか．つまり，$2m-5n$ はすべての整数値を表すことができるので，任意の a に対して，a に一番近い整数を都合よく決めるのです．例えば $a=1.2$ ならば $2m-5n=1$，$a=3.7$ なら $2m-5n=4$ という具合に．これを満たす $(m,\ n)$ が直線に最も近い格子点です．このとき，a と a に最も近い整数 N との距離（差）は $\dfrac{1}{2}$ 以下になります（下図参照）．



つまり，円の半径が $r\geqq\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$ であれば，傾き $\dfrac{2}{5}$ の任意の直線と必ず交わることになるのです．