■

✎注　合同式を利用しないなら，
$8^k = (7+1)^k$ と解釈して二項定理で展開する
$8^k - 1 = 8^k - 1^k$ と解釈して因数分解を利用する
ことになります．さっきと全く同じなので各自で勝手にやっといてください．

めんどくさいから
やりませ〜ん
は〜い

2　偶奇性

整数の問題を考えるとき，その数の偶奇性（その数が偶数なのか奇数なのか）があらかじめわかっていると，かなり手間が省けて都合が良いです．いきなり問題を解き始める前に，その数の偶奇性がどうなっているのか，まず考えるクセをつけよう．

偶奇性が判定できるのは，次のように和，差，積の偶奇がわかっている場合がほとんどです．

▷Point◁（整数の偶奇性）

2 つの整数 m，n について次の偶奇性が成り立つ．

$m+n$ が偶数 $\iff$ m，n の偶奇は一致する
$m-n$ が偶数 $\iff$ m，n の偶奇は一致する
$m+n$ が奇数 $\iff$ m，n の偶奇は一致しない
$m-n$ が奇数 $\iff$ m，n の偶奇は一致しない
mn が奇数 $\iff$ m，n は共に奇数

まあ
当たり前の
ことですね

※暗記するんじゃないよ。
意味を考えて その都度．判断します

例題 3.
a，b を整数とし，2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ を考える．この方程式の判別式 D が平方数であるならば，解は全て整数であることを示せ．

どこに
偶奇性を
使うのかな

考え方　$D = a^2 - 4b = m^2$ とおけば，解は $x = \dfrac{-a \pm \sqrt{D}}{2} = \dfrac{-a \pm m}{2}$．これが整数になるには，$-a \pm m$ が偶数になればよいことがわかります．このとき，a，m の偶奇性はどうなればよいのでしょうか．

う〜ん
見えない

解　$D = a^2 - 4b = m^2$ とおけば，解は

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-a \pm m}{2}$$

となる．$D = a^2 - 4b = m^2$ より，
$(a+m)(a-m) = 4b =$ 偶数 となる．また，$(a+m)+(a-m) = 2a =$ 偶数 ともなるので，$a+m$ と $a-m$ は共に偶数である．

したがって，解の分子部分 $-a+m$ と $-a-m$ が偶数だから，解は整数になる．

それぞれ
ー(マイナス)
でくくると
ー(a−m)
ー(a+m)
となります

実に
ウマイ証明　スゲ〜

■

例題 4.
p，q を整数とし，$f(x) = x^2 + px + q$ とおく．$f(1)$ も $f(2)$ も 2 で割り切れないとき，方程式 $f(x) = 0$ は整数の解をもたないことを示せ．

考え方　$f(1)$ も $f(2)$ も 2 で割り切れないことから，p と q の偶奇性が決まります．

解　$f(1) = 1+p+q$ が 2 で割り切れないことから，$p+q$ は偶数．$f(2) = 4+2p+q$ が 2 で割り切れないことから，q は奇数．したがって，p も q も奇数となる．

方程式 $f(x) = 0$ が整数の解 $x = m$ をもつと仮定すると，$f(m) = 0$ より，

$$m^2 + pm + q = 0$$
$$m(m+p) + q = 0$$

$(m+q) - m = q$（奇数）だから，$m+q$ と m の偶奇性は一致しないので，積 $m(m+q)$ は偶数である．

ここが
最大の
ポイント

これは
思いつかんわ

したがって，$m(m+p)+q =$（偶数）+（奇数）が 0 になることはない

つまり，方程式 $f(x) = 0$ は整数の解をもたない．

これもウマイ証明やけど
ちょっと気づかないねえ…

■

これはこれで
良しとしよう。

3　周期性

ある状態が繰り返しおこっているとき「周期性をもつ」といいます．整数問題に限らず，数学においては周期性を考えることは重要です．周期性を見つける方法はただ一つ，**ひたすら実験すること**です．

次の問題でも，まずは，3^1，3^2，3^3，3^4，3^5，… の 1 の位を順に調べて，規則性を予測するしかありません．

例題 5.　3^{1000} の一の位の数字を求めよ．

解　3^1，3^2，3^3，3^4，3^5，… の一の位を順に調べると，3，9，7，1，3，9，7，1，… と周期 4 で繰り返す．1000 は 4 で割り切れるから，3^{1000} の一の位の数字は 1 である．

■

注　おそらく上の解答で問題ないと思いますが，「上の解答は単なる予想に過ぎず，厳密性に欠ける」と思う人は．周期が 4 であることを証明してください．証明方法は，3^1，3^2，3^3，3^4 の一の位の数字が異なることを確認した上で，3^{n+4} と 3^n の一の位の数字が等しいこと，つまり，$3^{n+4}-3^n$ が 10 の倍数であることを示せばよいでしょう．


フムフム

$$3^{n+4}-3^n=3^n(3^4-1)=3^n(81-1)=3^n\cdot 80$$

例題 6.　2000^n を 7 で割った余りを a_n とし，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ とおく．このとき，S_n が 7 で割り切れる最小の n を求めよ．

考え方　まずは実験して a_n を予測しますが，実際に，2000^1，2000^2，2000^3，2000^4，2000^5，… を計算してから 7 で割るでしょうか．こんなときこそ合同式です．

解　$2000\equiv 5 \pmod 7$ であるので，

合同式を使わんかったらエライことになるわ

$$2000^2\equiv 5^2\equiv 4 \pmod 7$$
$$2000^3\equiv 5^3\equiv 5\cdot 5^2\equiv 5\cdot 4\equiv 20\equiv 6 \pmod 7$$
$$2000^4\equiv 5^4\equiv (5^2)^2\equiv 4^2\equiv 2 \pmod 7$$
$$2000^5\equiv 5^5\equiv 5^2\cdot 5^3\equiv 4\cdot 6\equiv 24\equiv 3 \pmod 7$$
$$2000^6\equiv 5^6\equiv (5^3)^2\equiv 6^2\equiv 36\equiv 1 \pmod 7$$
$$2000^7\equiv 5^7\equiv 5^1\cdot 5^6\equiv 5^1\equiv 5 \pmod 7$$


合同式って便利

以後，5, 4, 6, 2, 3, 1 を繰り返していく．したがって，

$$5+4+6+2+3+1=21$$

ではじめて 7 で割り切れるから，最小の n は $n=6$．

■

注　これもおそらく上の解答で問題ないと思いますが，「上の解答は単なる予想に過ぎず，厳密性に欠ける」と思う人は．周期が 6 であることを証明してください．証明方法は，$5^1\sim 5^6$ を 7 で割った余りが全て異なることを確認した上で，5^{n+6} と 5^n を 7 で割った余りが等しいこと，つまり，$5^{n+6}-5^n$ が 7 の倍数であることを示せばよいでしょう．

$$\begin{aligned}5^{n+6}-5^n&=5^n(5^6-1)=5^n(15625-1)\\&=5^n\cdot 15624=5^n\cdot 7\cdot 2232\end{aligned}$$

例題 7.　整数 n に対し $f(n)=\dfrac{n(n-1)}{2}$ とおき，$a_n=i^{f(n)}$ と定める．ただし，i は虚数単位を表す．このとき，$a_{n+k}=a_n$ が任意の整数 n に対して成り立つような正の整数 k を全て求めよ．　　[2001 年京大前期理系]

考え方　京大理系の問題ということで，いかにもムツカシそうに感じますが，これまた実験すれば簡単に周期性が見えてきます．

周期性わかった～


n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(n)$	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36
mod 4	0	0	1	3	2	2	3	1	0	0

$i^4=1$ なので，$f(n)$ を 4 で割った余りに注目すると，n の周期が 8 であることが予想されます．今度はきちんと周期が 8 である証明もします．

これがポイント

解

$n=0$ のとき，$a_n=i^0=1$
$n=1$ のとき，$a_n=i^0=1$
$n=2$ のとき，$a_n=i^1=i$
$n=3$ のとき，$a_n=i^3=-i$
$n=4$ のとき，$a_n=i^6=i^2=-1$
$n=5$ のとき，$a_n=i^{10}=i^2=-1$
$n=6$ のとき，$a_n=i^{15}=i^3=-i$
$n=7$ のとき，$a_n=i^{21}=i$

また，

$$\begin{aligned}a_{n+8}&=i^{f(n+8)}=i^{\frac{(n+8)(n+7)}{2}}=i^{\frac{n^2+15n+56}{2}}\\&=i^{\frac{n^2-n+16n+56}{2}}=i^{\frac{n(n-1)}{2}+8n+28}\\&=i^{\frac{n(n-1)}{2}+4(2n+7)}=i^{\frac{n(n-1)}{2}}=a_n\end{aligned}$$

$i^4=1$ なので $i^{4(2n+7)}=1$ です

であるので，a_n は

$$1,\ 1,\ i,\ -i,\ -1,\ -1,\ -i,\ i$$

を繰り返す（周期 8）．

したがって，求める k は 8 の倍数．

ヤッタ～

■

京大合格～