# $N!$ に含まれる素因数 $p$ の個数

ムツカシそうなタイトルやなあ…

素数とは数の原子のようなものです．つまりどんな数字も素数の積にただ一通りに分解されるので（素因数分解の一意性），その分解の様子がわかれば，もとの数の性質を詳しく知ることができます．

今回は $N!(=N\times(N-1)\times\cdots\times 2\times 1)$ を素因数分解したときの素数 $p$ の指数（つまり，素数 $p$ で最大何回割れるのか）について考えてみよう．

まず始めに，次のことを確認しよう．

▷Point◁

1 から $N$ までの自然数の中で，$p$ の倍数は

$$\left[\frac{N}{p}\right]\text{個}$$

ある．ただし，$[x]$ は $x$ を超えない最大の整数を表す．

ガウスきら〜い

いきなりのガウス記号でビビるかもしれませんが，ガウス記号の定義を考えれば当たり前のことです．例えば，「1 から 100 までの中に 3 の倍数は何個あるか」と言われれば

$$100\div 3=33\cdot\cdot\cdot 1$$

という計算をして，「33 個」と求めると思いますが，これは

$$\left[\frac{100}{3}\right]=[33.333\cdots]=33$$

計算しただけのことです．

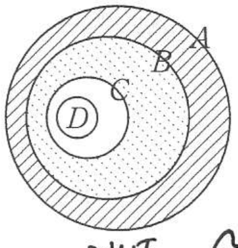
それだけのことか〜 ビビって損したわ

それでは早速，具体例で考えてみよう．

**例題** 20! は 2 で何回割れるか．

大切なことは，集合としての包含関係です．

つまり 2 の倍数の中に 4 の倍数があり，4 の倍数の中に 8 の倍数があり，… といった感じで，この様子はベン図で書くとよりイメージしやすいと思います．




これはイメージしやすい

$A$ が 2 の倍数，
$B$ が 4 の倍数，
$C$ が 8 の倍数，
$D$ が 16 の倍数
の集合を表しています．

「2 で 1 回だけ割れる数」とは「2 の倍数だが 4 の倍数ではない数」のことなので，図の斜線部分を表しています．この部分に含まれる数の個数は

$$\left[\frac{20}{2}\right]-\left[\frac{20}{4}\right]\text{個}.$$

よって，素因数 2 の個数は $\left(\left[\frac{20}{2}\right]-\left[\frac{20}{4}\right]\right)\times 1$ 個となります．

フムフム

次に，「2 で 2 回だけ割れる数」とは「4 の倍数だが 8 の倍数ではない数」のことなので，図の網目部分を表しています．

よってこの部分に含まれる数の個数は

$$\left[\frac{20}{4}\right]-\left[\frac{20}{8}\right]\text{個}$$

で，素因数 2 の個数は $\left(\left[\frac{20}{4}\right]-\left[\frac{20}{8}\right]\right)\times 2$ 個．

フムフム

以下，同様にして，「2 で 3 回だけ割れる数」とは「8 の倍数だが 16 の倍数ではない数」のことなので，この部分に含まれる数の個数は

$$\left[\frac{20}{8}\right]-\left[\frac{20}{16}\right]\text{個}$$

で，素因数 2 の個数は $\left(\left[\frac{20}{8}\right]-\left[\frac{20}{16}\right]\right)\times 3$ 個．

フムフム

「2 で 4 回だけ割れる数」とは「16 の倍数だが 32 の倍数ではない数」のことなので，この部分に含まれる数の個数は

$$\left[\frac{20}{16}\right]-\left[\frac{20}{32}\right]\text{個}$$

で，素因数 2 の個数は $\left(\left[\frac{20}{16}\right]-\left[\frac{20}{32}\right]\right)\times 4$ 個

フムフム

$2^4<20<2^5$ なので，1 から 20 の自然数の中で 2 で 5 回以上割れる数は存在しないので，これで終わり．したがって，素因数 2 の総数は，$\left[\frac{20}{32}\right]=0$ に注意して，

$$\left(\left[\frac{20}{2}\right]-\left[\frac{20}{4}\right]\right)\times 1+\left(\left[\frac{20}{4}\right]-\left[\frac{20}{8}\right]\right)\times 2+\left(\left[\frac{20}{8}\right]-\left[\frac{20}{16}\right]\right)\times 3+\left(\left[\frac{20}{16}\right]-\underbrace{\left[\frac{20}{32}\right]}_{=0}\right)\times 4$$
$$=\left[\frac{20}{2}\right]+\left[\frac{20}{4}\right]+\left[\frac{20}{8}\right]+\left[\frac{20}{16}\right]$$
$$=10+5+2+1=18$$

よって，20! には素因数 2 が 18 個存在するので、2 で最高 18 回割れることがわかる.（おわり）

✎注　次のように考えた方がイメージしやすいかもしれません．例えば，20! に含まれる素因数 2 の個数を数えてみよう．以下のように，素因数 2 の個数分だけ ◯ を上に重ねていきます．この ◯ の全個数が 20! に含まれる素因数 2 の個数に相当します（確かに 18 個あります）.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | ◯ | | | | | ← 4段目 |
| | | | | | | | ◯ | | | | | | | | ◯ | | | | | ← 3段目 |
| | | | ◯ | | | | ◯ | | | | ◯ | | | | ◯ | | | | ◯ | ← 2段目 |
| | ◯ | | ◯ | | ◯ | | ◯ | | ◯ | | ◯ | | ◯ | | ◯ | | ◯ | | ◯ | ← 1段目 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | |

表を横に見て数えよう．1 段目に 10 個，2 段目に 5 個，3 段目に 2 個に，4 段目に 1 個の ◯ があります．よく見ると，1 段目は 2 の倍数の場所に ◯ が付いています．つまり，$\left[\frac{20}{2}\right]=10$ 個．同様に，2 段目は 4 の倍数，3 段目は 8 の倍数，4 段目は 16 の倍数の場所に ◯ が付いていることがわかります．

よって，20! に含まれる素因数 2 の個数は，20 以下に含まれる，2 の倍数，4 の倍数，8 の倍数，16 の倍数の個数に等しく，

$$\left[\frac{20}{2}\right]+\left[\frac{20}{4}\right]+\left[\frac{20}{8}\right]+\left[\frac{20}{16}\right]=10+5+2+1=18 \text{ 個}$$

ナルホドへ　これは実におもしろい考え方や〜

と求められます．

✎注　ちなみに，$20!=2432902008176640000=2^{18}\times 3^8\times 5^4\times 7^2\times 11^1\times 13^1\times 17^1\times 19^1$

一般的には次の公式で表されます．証明は，先ほどの具体例をそのまま一般化するだけなので省略.

**▷Point◁**

$N$ を自然数とし，$N$ ! に含まれる素因数 $p$ の個数は，

$$\left[\frac{N}{p}\right]+\left[\frac{N}{p^2}\right]+\left[\frac{N}{p^3}\right]+\cdots$$

となる.

ふ〜ん　何となくわかる…

**例題**　30! を計算したとき，末尾に現れる 0 の個数を求めよ.

**解**　$10=2\times 5$ であるから，30! の中に含まれる 2 と 5 の素因数の個数を調べるが，明らかに素因数 2 の個数の方が多いので，素因数 5 の個数を調べればよい．$5^2<30<5^3$ なので，1 から 30 の自然数の中で 5 で 3 回以上割れる数は存在しないので，$\left[\frac{30}{5}\right]+\left[\frac{30}{5^2}\right]=6+1=7$ だから，素因数 5 の個数は 7 個．よって，$30!=10^7N$（$N$ は素因数 5 を含まない整数）となり，下 7 桁目まで 0 が続く.

**例題**　$p$ を素数，$n$ を正の整数とするとき，$(p^n)!$ は $p$ で何回割り切るか.

（2009 年京大理系甲）

京大でも出たのネ　これはラッキー問題や

**解**

$$\left[\frac{p^n}{p}\right]+\left[\frac{p^n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{p^n}{p^{n-1}}\right]+\left[\frac{p^n}{p^n}\right]$$
$$=p^{n-1}+p^{n-2}+\cdots\cdots+p+1 \quad \text{（等比数列の和）}$$
$$=\frac{p^n-1}{p-1}$$

✎注　何の説明もなしに，いきなりこの公式で解答するとちょっとまずいかもしれません．どの程度まで解答を書けばよいのかは，赤本などの過去問題集の模範解答を確認してください.

はーい