ひょっとして，パクッた？

人のモノを
パクッたら
あかんやろ

長年，入試問題に関わっていると，そっくりな問題に出くわすことがあります．

1　2002 年東京大学 (前期) 文理共通問題

今から 10 年以上前に東京大学で次のような問題が出題されました．数列と整数の融合問題です．

n は正の整数とする．x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余りを a_nx+b_n とおく．

(1) 数列 a_n，b_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n \end{cases}$$

を満たすことを示せ．

(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，a_n，b_n は共に正の整数で，互いに素であることを証明せよ．

[2002 年東京大学 (前期) 文理共通問題]

漸化式キラ～イ

ムズそう…

$\boxed{\text{考え方}}$ 当然ながら (2) の証明問題は (1) の連立漸化式を利用します．数学的帰納法で証明するのが良いでしょう．互いに素であることの証明も典型的なので，この問題のポイントは (1) の連立方程式を導き出すことです．これさえできれば問題ないはず．言うまでもなく，x^{n+2} を x^2-x-1 で割った余りが $a_{n+1}x+b_{n+1}$ です．

解 (1)

x^{n+1} を x^2-x-1 で割った商を $Q_n(x)$ とおくと，

$$x^{n+1}=(x^2-x-1)Q_n(x)+a_nx+b_n$$

と書ける．この式の両辺に x をかけて，

$$\begin{aligned} x^{n+2} &= x(x^2-x-1)Q_n(x)+a_nx^2+b_nx \\ &= x(x^2-x-1)Q_n(x)+a_n(x^2-x-1) \\ &\qquad +a_n(x+1)+b_nx \\ &= x(x^2-x-1)Q_n(x)+a_n(x^2-x-1) \\ &\qquad +(a_n+b_n)x+a_n \\ &= (x^2-x-1)\{xQ(_nx)+a_n\} \\ &\qquad +(a_n+b_n)x+a_n \end{aligned}$$

実にウマイ
式変形

ナルホド～

これは，x^{n+2} を x^2-x-1 で割った余りが，$(a_n+b_n)x+a_n$ であることを意味しているので，

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n \end{cases}$$

が成立する．

(2) 数学的帰納法で証明する．

(i) a_n，b_n は共に正の整数であること の証明．

$$x^2=(x^2-x-1)+x+1$$

だから，$a_1=b_1=1$ である．

a_k，b_k が共に正の整数であると仮定すると，(1) の結果より，a_{k+1}，b_{k+1} も正の整数になるので，全ての自然数 n に対して，a_n，b_n は共に正の整数である．

(ii) a_n，b_n は共に互いに素であること の証明．

まず，$a_1=b_1=1$ であるので，a_1 と b_1 は互いに素である．次に

a_k，b_kが互いに素 $\Longrightarrow$ a_{k+1}，b_{k+1}も互いに素 …①

を証明する．

a_{k+1}，b_{k+1} が互いに素でないと仮定すると，共通の素因数 p が存在し，

$$a_{k+1}=p\alpha,\ b_{k+1}=p\beta$$

とおける．(1) の結果より，

$$a_k=b_{k+1}=p\beta,\ b_k=a_{k+1}-b_{k+1}=p(\alpha-\beta)$$

となるので，a_k，b_k も互いに素ではない．

よって，① の対偶が証明されたので，① は真である．全ての自然数 n に対して，a_n，b_n は互いに素であることが示された．

■

注　「互いに素である」とは「共通の素因数をもたないこと」です．詳しくは，犬プリ「互いに素 (Part.1)」を参照のこと．

証明は意外とアッサリやったな

そんなに大したことないね

はーい

もう一度見ておくれ

2　2013 年京都大学 (前期) 理系

さて，この東京大学の問題から 11 年後に京都大学で次の問題が出題されました．

> n は自然数とし，x^n を x^2-2x-1 で割った余りを $ax+b$ とする．このとき，a，b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ．
>
> [2013 年京都大学 (前期) 理系]

これはパクリやろ…

そのまんま

う〜ん，誘導が全くないのは最近の京大の特徴ですが，それにしても，先ほどの東大の問題と全く同じですね (完全なパクリでしょう)．あえて違いを言うなら「互いに素」という言葉を使わずに，「ともに割り切る素数が存在しない」と丁寧に書いてあることぐらいです．東大の問題を解いた経験があれば，どうってことない問題なのですが，初見だとなかなか厳しいと思います．

というのも，先ほどの東大の問題でも述べたように，(1) の連立漸化式がポイントなので，やはりこの問題でも連立漸化式を導き出さねばならないからです．しかし，東大の問題が余りを「a_nx+b_n」と数列の雰囲気を出して表記していたのに対し，この京大の問題では余りが単に「$ax+b$」となっています．ここから果たして数列をイメージできるでしょうか？

おそらくこの問題は「x^n を x^2-2x-1 で割った余りが $ax+b$」という文章を見て，「a も b も n に依存するから，n の関数，つまり数列とみなせる」という発想ができるかどうかを問うていると思われます．東大とは視点が違います．その点で，この京大の問題は東大の問題よりも難易度が高いと思います．

さすが京大!!

解　x^n を x^2-2x-1 で割った余りを a_nx+b_n とおく．このとき，

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n \end{cases} \quad \cdots\cdots (※)$$

が成立する (東大の問題と解き方が全く同じなので省略しました．各自で真似してやっといてください)．

は〜い

(i)　a_n，b_n は共に整数であること の証明．

x を x^2-2x-1 で割った余りは x なので，$a_1=1$，$b_1=0$ である．

a_k，b_k が共に整数であると仮定すると，(※) より，a_{k+1}，b_{k+1} も整数になるので，全ての自然数 n に対して，a_n，b_n は共に整数である．

(ii)　a_n，b_n を共に割り切る素数がないこと の証明．

まず，$a_1=1$，$b_1=0$ であるので，a_1 と b_1 は互いに素である．次に

$$a_k，b_k が互いに素 \Longrightarrow a_{k+1}，b_{k+1} も互いに素 \quad \cdots ①$$

を証明する．

a_{k+1}，b_{k+1} が互いに素でないと仮定すると，共通の素因数 p が存在し，

$$a_{k+1}=p\alpha,\ b_{k+1}=p\beta$$

とおける．(1) の結果より，

$$a_k=b_{k+1}=p\beta,\ b_k=a_{k+1}-2b_{k+1}=p(\alpha-2\beta)$$

となるので，a_k，b_k も互いに素ではない．

よって，① の対偶が証明されたので，① は真である．全ての自然数 n に対して，a_n，b_n は互いに素，つまり共に割り切る素数は存在しない．

■

さっきと全く同じ証明ですやん