整 数 問 題 の 攻 略（原則編）

秋のクロワッサンス特別講座（2011 年版）

奈良県立奈良高等学校
赤阪 正純

1　はじめに

史上最大の数学者ガウス（Gauss，Carl Friedrich 1777〜1855 ドイツ）は

数学は科学の女王であり，
整数論は数学の女王である

という言葉を残した．つまり，「整数論は科学の中で最高位に位置する学問分野である」というわけだ．ともすれば，我々は「数学は科学の基礎であり，整数論は数学の基本である」と単純に捉えがちだが，それを「女王」という言葉で表現したガウスのセンスは素晴らしい．それは，科学の中で数学，とりわけ整数論が，最も美しく神秘的な魅力をもっていることを意味している．

そして，ガウスの言葉にはもう一つの意味が込められている．それは，数学の支柱となるような重要な考え方のほとんどがこの整数論に含まれていること，である．つまり，整数論は科学にとって最も大切な思考方法を学ぶことができる学問分野であるということだ．日本が生んだ最初の世界的数学者，高木貞治（1875〜1960）も「整数論の方法は繊細である，小心である，その理想は玲瓏にして些の陰翳をも留めざる所にある．代数学でも，函数論でも，叉は幾何学でも，整数論的の試練を経て初めて精妙の境地に入るのである．」と述べている（初等整数論講義第 2 版序言）．代数的整数論の世界的権威で，類体論の創始者である氏のまことに奥の深い言葉である．

整数論の問題（以下，整数問題）を解決する場合の基本的な考え方とは，すなわち，

(1) 特殊な場合についての実験
(2) 一般法則の推測
(3) 法則の証明
(4) 証明された法則の適用

である．確かに，これらの考え方は，数学に限らず科学の各分野に応用される考え方である．整数問題を考えることは，最高の思考訓練になる．

したがって，整数問題が難関大学を中心に頻出の分野である理由も理解できよう（特に，京都大学，一橋大学ではほぼ毎年出題されている）．変な受験テクニックや解法パターンの暗記に頼ることなく，本質をじっくり考えてもらおう，というのが大学側の意図するところであろう．

しかしながら，整数問題を解くには，整数特有の性質に着目することが多く，その性質を知っているかどうかが正解へのカギを握っている．また，一部に他分野（方程式，図形，関数など）との融合問題も見られ，見た目には整数問題かどうかわからない問題もあるが，示すべき内容，方法は共通しているので，いずれにしても，整数特有の性質，解決の手法を知らないと，どうにもならない．確かに，この整数特有の性質は「予備知識がなくても考えればわかること」ではあるが，極度の緊張状態の入試本番において思いつくのはなかなか厳しいものがあるため，十分な事前の対策が必要であろう．

整数問題を苦手とする受験生は多く，入試でも「ほとんど解けなかった」という感想をよく聞く．また，できたと思っても，記述内容に論理的飛躍があることも多く，正答率は極めて低いと思われる．ということは，逆に，整数問題が解ければ，他の受験生に差をつけ合格にグッと近づくことになるわけで，整数問題の出来，不出来が合否に大きな影響を及ぼすといっても過言ではない．

にも係わらず，現行の教育課程の下では，整数に関して，小学校で倍数や約数の性質について，中学校で素数や素因数分解について簡単に触れるだけであり，高等学校でも，整数に関して十分に時間をかけて学習することは，ない．このような状況であるから，整数問題を扱う適切な参考書や問題集も少なく，対策が立てにくいのが現状である．

また，おそらく整数問題の唯一の本格的な参考書である『大学への数学　マスター・オブ・整数』(東京出版) は，内容があまりにも広範囲に渡っていて，少し難しすぎる (理学部数学科に進学して，将来，整数論を研究する気がある人は別だが)．確かにこの本を勉強すれば整数問題に関しては完璧になるが，他教科の学習のことも考えると，マスターするにはあまりにも時間がかかりすぎ，適切な参考書とはいえない．

そこで，整数特有の性質，整数問題の攻略方法を短期間で効率よく理解するために，本書を執筆した．まずは，**整数問題の攻略 (原則編)** を熟読して，整数問題攻略の基本的な考え方を確認すること．

まずはじめに，整数問題攻略の 4 つの原則を述べる．これらは，ほとんど当たり前のことだが，意外と頭に入っていない (意識していない) 人もいると思うので確認しておこう．この 4 つの原則は常識としてこれから使っていくので，しっかりと頭に入れておくこと．

▷Point◁

☆整数問題の第一原則☆

整数は幅 1 でトビトビに存在する．

整数の離散性

実数が数直線上にベタ〜ッと存在するのに対し，整数はトビトビに存在する．

これを**実数の連続性**，**整数の離散性**という．

例 1

m，n を整数とするとき，次のことがいえる．

$$m < n < m+1 \Longrightarrow \text{矛盾}$$
$$m < n < m+2 \Longrightarrow n = m+1$$
$$m \leqq n < m+1 \Longrightarrow n = m$$
$$n < m \Longrightarrow n \leqq m-1$$

整数の離散性より，上の例のように不等式から整数を確定することができる．このようなことは実数では決しておこらない．このことは整数と実数との違いを決定づける非常に重要な整数特有の性質である．

練習問題 1

n が 1 より大なる自然数のとき，

$$f(n) = n^2 - n + 1$$

は平方数にならないことを示せ．

考え方

平方数になることを示すのは簡単だが (実際に作ればよい)，平方数にならないことをいうのは難しい．しかし，整数の離散性から平方数もトビトビに存在しているわけだから，この場合の $f(n)$ がそのトビトビの隙間に入っていることを示せば良い．

解

$n > 1$ のとき，

$$f(n) - (n^2 - 2n + 1) = n > 0$$
$$n^2 - f(n) = n - 1 > 0$$

よって，

$$n^2 - 2n + 1 < f(n) < n^2$$

つまり，

$$(n-1)^2 < f(n) < n^2$$

となるので $f(n)$ は平方数にはならない．

■

注　$f(n) = (n-1)n + 1$ と書くと，上の練習問題 1 の結果は，「1 以上の連続する 2 つの自然数の積に 1 を加えた数は平方数にはならない」ことを主張している．なお，不思議なことに，1 以上の連続する 4 つの自然数の積に 1 を加えた数は，次に示すように，常に平方数になる．

$$(n-1)n(n+1)(n+2) + 1 = (n^2 + n - 1)^2$$

□

例 2

n の倍数は幅 n ごとにトビトビに存在する．つまり，適当に連続する n 個の整数をとれば，その中には必ず n の倍数が 1 個存在する．また余りの均等性より，連続する n 個の整数の中には n で割ったときの余りが，1，2，⋯，$n-1$ になる整数が 1 つずつ存在する．当然ながら，n で割った余りが同じ数も幅 n ごとにトビトビに存在する．

例 3

n を自然数とする．a が n の倍数のとき，

$$-n < a < n \implies a = 0$$

✎**注**　上の例 2，例 3 は非常に重要な性質で，これから頻繁に使っていくことになる．

□

例 4

一般に，k を 2 以上の自然数とするとき，連続する k 個の整数の中には，k の倍数，$k-1$ の倍数，…，2 の倍数が必ず存在する．したがって，連続する k 個の整数の積は必ず $k!$ の倍数になる．特に，

連続 2 整数の積は偶数

連続 3 整数の積は 6 の倍数

であること，は基本である．

✎**注**　連続する k 個の整数の積は必ず $k!$ の倍数になることの証明はいろいろ考えられるが，次の二項係数の式を見れば，一目瞭然であろう (分子が連続する k 個の整数で，二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k$ は整数だから)．

$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{C}_k &= \frac{n!}{(n-k)!k!}\\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\end{aligned}$$

なお，2003 年に滋賀大 (前期) で $k=2$，4 の場合の証明が出題されている．

□

練習問題 2

奇数の 2 乗は 8 で割ると 1 余ることを示せ．

解

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$$

$k(k+1)$ は連続 2 整数の積だから 2 の倍数なので，$4k(k+1)$ は 8 の倍数である．

よって，奇数の 2 乗は 8 で割ると 1 余る数である．

■

練習問題 3

$n > 3$ とする．n と $n+2$ が共に素数のとき，$n+1$ は 6 の倍数であることを示せ．

考え方

整数特有の性質を利用して証明できる．以下に 3 種類の解答を紹介するが，いずれも大切な考え方である．

解 1

$n > 3$ で n と $n+2$ が共に素数だから，n と $n+2$ は共に奇数である．よって，$n+1$ は偶数．

また，n，$n+1$，$n+2$ は連続 3 整数だから，このうち 1 つは必ず 3 の倍数．$n > 3$ で n と $n+2$ が共に素数だから，これらが 3 の倍数になることはなく，$n+1$ が 3 の倍数になる．

したがって，$n+1$ は 2 の倍数かつ 3 の倍数になるので，6 の倍数である．

■

解 2

$n(n+1)(n+2)$ は連続 3 整数の積なので 6 の倍数である．$n > 3$ で，n と $n+2$ が共に素数なので，n と $n+2$ は共に 2 の倍数でも 3 の倍数でもないので，$n(n+2)$ は 6 の倍数にはならない．

よって，$n+1$ が 6 の倍数である．

■

解 3

連続する 6 整数は

$$6m-2,\ 6m-1,\ 6m,\ 6m+1,\ 6m+2,\ 6m+3$$

と表現できる．この中で，

$6m-2$ と $6m+2$ は 2 の倍数，

$6m+3$ は 3 の倍数，

$6m$ は 6 の倍数

になるので，$n > 3$ で n と $n+2$ が共に素数になるとき，$n = 6m-1$，$n+2 = 6m+1$ になるしかないので，その間の数 $n+1$ が $6m$，つまり 6 の倍数になる．

■

✎**注**　n と $n+2$ が共に素数のとき，この 2 つの素数を双子素数と呼ぶ．双子素数は

$$(3,\ 5),\ (5,\ 7),\ (11,\ 13),\ \cdots$$

など，無限に存在すると考えられているが，未だ証明されていない．上の例は，(3, 5) 以外の双子素数の間の数は必ず 6 の倍数であることを主張している．

□

このことを背景にした問題として，京大オープン模試の問題を次に紹介しよう．

練習問題 4

2^n+1 と 2^n-1 が共に素数となる自然数 n をすべて求めよ．

考え方

2^n が 2^n+1 と 2^n-1 の間の整数であること，つまり，2^n+1，2^n，2^n-1 が連続する 3 整数であることに注目する．

解

$n=1$ のときは，$2^n-1=1$ が素数にならないので不適．

$n>2$ のとき，$2^n-1>3$ であるので，2^n+1 と 2^n-1 が共に素数のとき，**練習問題** 3 より，2^n は 6 の倍数にならねばならないが，これは矛盾．よって，2^n+1 と 2^n-1 が共に素数となる自然数は $n=2$ の場合に限られる．

■

注　当然ながら，実際にこの問題を解答する際は，**練習問題** 3 の内容をまずは証明せねばならない．そういう意味で，**練習問題** 3 の内容を知らないとこの問題は大変難しい．しかし，たとえ知らなくても 2^n+1 と 2^n-1 がともに素数になる実例をいくつか調べる中で，その真ん中の数が 6 の倍数になっていることに気づかねばならない．

□

▷Point◁

☆整数問題の第二原則☆

整数問題では『積の形』をつくる．

例えば，x, y が実数のとき，$xy=5$ を満たす $(x,\ y)$ の組は無数に存在するが，x, y が整数のとき，$xy=5$ を満たす $(x,\ y)$ の組は 4 組しか存在しない（第一原則で紹介した実数の連続性，整数の離散性を用いた）．このように，積の形を作れば，解の範囲を絞り込むことができる．**積の形をつくる最大の目的は解の範囲を絞り込むことにある．**

練習問題 5

次の方程式をみたす整数の組 $(x,\ y)$ を全て求めよ．

(1) $xy+3x+2y+5=0$

(2) $2xy+x+3y+1=0$

考え方

積の形に変形する基本問題である．このタイプの式は，文字が x と y の 2 つで次数が 1 次だから，2 元 1 次不定方程式とよばれる．この問題では，

$$xy+ax+by+c=0$$
$$\Longleftrightarrow (x+b)(y+a)-ab+c=0$$
$$\Longleftrightarrow (x+b)(y+a)=ab-c$$

の変形がポイントである．

(2) は，xy の係数が 1 ではないので，まずは両辺を 2 で割って係数を 1 にすることから始める．

解

(1)

$xy+3x+2y+5=0$ より，

$$(x+2)(y+3)-6+5=0$$
$$(x+2)(y+3)=1$$

したがって，$(x+2,\ y+3)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$ となり，整数の組 $(x,\ y)$ が定まる．

$\therefore\ (x,\ y)=(-1,\ -2),\ (-3,\ -4)$.

■

(2)

$xy+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}=0$ より，

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=0$$
$$\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

ここで両辺を 4 倍して，

$$(2x+3)(2y+1)=1$$

となる．

したがって，$(2x+3,\ 2y+1)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$ となり，整数の組 $(x,\ y)$ が定まる．

$\therefore\ (x,\ y)=(-1,\ 0),\ (-2,\ -1)$.

■

注　なお，カンが働く人は，始めから両辺を 2 倍して，

$$4xy+2x+6y+2=0$$
$$(2x+3)(2y+1)-3+2=0$$
$$(2x+3)(2y+1)=1$$

と変形しても構わないが，なかなか思いつくものではない．やはり，xy の係数を 1 になおして考えるのが普通．

□

上の例からも分かるように，積の形を作る場合は，

$$(\quad\quad)(\quad\quad) = \text{定数}$$

の形にしないと意味がない．

例えば次のような問題はどうであろうか．

練習問題 6

次の方程式をみたす整数の組 $(x,\ y)$ を全て求めよ．

$$x^2 - 4y^2 - 2x = 0$$

考え方

この問題の解答でよく見受けられるのが，次のように変形してしまう人である．

$$x^2 - 4y^2 - 2x = 0$$
$$x^2 - 4y^2 = 2x$$
$$(x+2y)(x-2y) = 2x$$

確かに，因数分解をして積の形を作れてはいるが，

$$(\quad\quad)(\quad\quad) = \text{定数}$$

の形ではないので，最後の式 $(x+2y)(x-2y) = 2x$ から，どうすることもできない（くれぐれも勝手に両辺を比較して，$x+2y=2$，$x-2y=x$ などとしないように）．

本問の場合は**平方完成すること**を原則としておきたい．つまり，

$$x^2 - 4y^2 - 2x = 0$$
$$x^2 - 2x - 4y^2 = 0$$
$$(x-1)^2 - 1 - 4y^2 = 0$$
$$(x-1)^2 - 4y^2 = 1$$
$$(x-1+2y)(x-1-2y) = 1$$

$(x-1+2y,\ x-1-2y) = (1,\ 1),\ (-1,\ -1)$ となり，整数の組 $(x,\ y)$ が定まる．

$\therefore\ (x,\ y) = (2,\ 0),\ (0,\ 0)$．

■

練習問題 7

自然数 n に対して，$\sqrt{n(n+5)}$ が整数になるとき，n は平方数であることを証明せよ．

考え方

先ほどは，平方数にならないことを示す問題を紹介したが，今回は平方数になることを証明する問題．様々な手法が考えられるが，一番手っ取り早い方法は，実際に n を求めてみて平方数になっていることを示す方法であろう．

解

$\sqrt{n(n+5)} = m$ とおくと，

$$n(n+5) = m^2$$
$$n^2 + 5n - m^2 = 0$$
$$\left(n + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - m^2 = 0$$
$$\left(n + \frac{5}{2} + m\right)\left(n + \frac{5}{2} - m\right) = \frac{25}{4}$$
$$(2n+5+2m)(2n+5-2m) = 25$$

したがって，n，m が自然数であることより，$2n+5+2m > 9$ なので，$(2n+5+2m,\ 2n+5-2m) = (25,\ 1)$ となり，$n=4$，$m=6$．

よって，n は平方数である．

■

注　この問題は $\sqrt{n(n+5)}$ が整数になるような n が，ただ一つしかなく，その n が平方数になっていることを意味している．

なお，この問題は 2010 年の第 2 回駿台京大実戦模試の問題を改作したものである．本来の問題は，後ほど紹介する．

□

練習問題 8

次の方程式をみたす整数の組 $(x,\ y)$ を全て求めよ．

(1) $x^2 + 4xy + 4y^2 = 9$

(2) $x^2 - 2xy - 3y^2 = 9$

(3) $x^2 - 3xy + 3y^2 = 9$

考え方

3 問とも式の形が非常に似ている．まずは，原則に従って「積の形に変形する」ことを考えるのだが，果たしてうまくいくのだろうか．

(1)(2) は因数分解できるから問題ないが，(3) は因数分解できない（平方完成でもうまくいかない）．では，どうすればよいのか？このような場合は **1 つの文字ついて整理し，判別式を考える**という方法をとる（当然ながら 2 次式の場合に限られる）．

解

(1)

左辺部を因数分解すると，

$$(x+2y)^2=9$$

となる．よって，$x+2y=3$ または $x+2y=-3$．これらをみたす整数の組 $(x,\ y)$ は無数に存在する．つまり，t を整数として，$(x,\ y)=(-2t\pm 3,\ t)$ と表される．

■

✎**注**　なお，これらの点は直線 $x+2y=\pm 3$ 上に等間隔に並んでいる．

□

(2)

左辺部を因数分解すると，

$$(x+y)(x-3y)=9$$

したがって，

$x+y$	1	3	9	-1	-3	-9
$x-3y$	9	3	1	-9	-3	-1

と組合せが決まり，これらを解いて

x	3	3	7	-3	-3	-7
y	-2	0	2	2	0	-2

と定まる．

■

✎**注**　先ほどの「平方完成」の手法をとっても構わない．つまり，

$$x^2-2xy-3y^2=9$$
$$(x-y)^2-4y^2=9$$
$$(x-y+2y)(x-y-2y)=9$$
$$(x+y)(x-3y)=9$$

同じ結果が得られる．

□

(3)

x について整理して，

$$x^2-3yx+(3y^2-9)=0$$

x は整数なので実数である．よって，判別式を D とすると，$D=9y^2-4(3y^2-9)\geqq 0$ であることが必要．これより $y^2\leqq 12$ となり，y は自然数なので，$y=1,\ 2,\ 3$ と定まる．このとき，それぞれに対して x が自然数になる場合を考えて，$(x,\ y)=(3,\ 3),(6,\ 3)$ と定まる．

■

発展 1

上の解答に，釈然としない人もいるだろう．特に(3)．(3) の式は因数分解できないから (なぜできないと判断できたのかも問題だが) 判別式を利用したわけだが，「あまりにも上手くいきすぎている」「たまたまうまくいっただけではないのか」と思ってしまう．もし，(1)(2) で (3) の方法を適用すると，(1) では判別式が $D=0$ となって y が消えてしまうし，(2) では判別式は $D=16y^2+36>0$ だから，判別式から y の範囲を絞り込むことはできない．なのに y はきちんと確定してしまう．なんだか不思議な気がするが，まあ，結果的にうまく因数分解できたし，良しとしようか ….

実は，判別式で上手くいく，上手くいかない理由は(1)(2)(3) の式を xy 平面上で図示すればわかる．つまり，

$$x^2+4xy+4y^2=9\longrightarrow 2\text{直線}$$
$$x^2-2xy-3y^2=9\longrightarrow \text{双曲線}$$
$$x^2-3xy+3y^2=9\longrightarrow \text{楕円}$$

になるので，楕円は閉曲線だから x や y の範囲が制限されるが，直線や双曲線は閉曲線ではないので x や y の範囲が制限されないからだ．したがって判別式を用いただけでは，整数解を絞り込むことはできない．にも関わらず，結果的に (1)(2) は因数分解できたから，うまく解を絞り込むことができたのだ．

つまり，考える順番としては，まずは，因数分解または平方完成して，積の形に変形できるかどうかを考え，無理なら判別式を利用する，ということになろう．

では，積の形にも変形できず，判別式でも解を絞り込めない場合はどうするのかという疑問が次に思い浮かぶ．例えば (3) の式で $+3y^2$ が $-3y^2$ になっただけの式，

$$x^2-3xy-3y^2=9$$

の場合だと，因数分解や平方完成で積の形にできないし，判別式も $D=21y^2+36>0$ だから，判別式から y の範囲を絞り込むこともできない．

この場合，$D=21y^2+36$ が平方数になるような y を求めれば良いのだが，これもなかなかうまくいかない．

では，どうすればよいのかというと，残念ながら高校段階では説明をすることが難しい．

結果だけをいうと，**解は無数に存在する** (なお，数式処理ソフト *Mathematica* を利用して $1\leqq y\leqq 1000$ の範囲で数値計算した結果，
$(x,\ y)=(12,\ 3),(57,\ 15),(273,\ 72),(1308,\ 345)$ の 4 つの解が得られた)．

無数とはいうものの，全くバラバラに存在するのだろ

うか．それとも，これらの解の間に何か規則性はあるのだろうか．

係数がたった1箇所変わっただけで解の様子や手法が全く異なってしまう．ここが整数問題の奥深さであり難しさでもある．

これらの違いはどこにあるのだろうか．この問いに答えるには，整数論の中の「2次形式」または「2次体の整数論」を学ばなければならない．大学へ進学してから調べてみるとよいだろう．なお，一足早く理由を知りたい，興味のある人は，高木貞治『初等整数論講義第2版』(共立出版) のP219の§ 34を参照せよ．

□

それでは，もう少し複雑な2次式の場合について考えてみよう．

練習問題 9

$$2x^2+3xy-2y^2+x+7y=5$$

を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ を全て求めよ．

考え方

まずは，因数分解を考えるが，この場合，左辺部をそのまま因数分解することはできない．つまり，左辺部にある定数を加える (または減じる) ことでうまく因数分解でき，積の形に変形することができる．まずは，2次の項 (最初の3項) だけで因数分解することから始めよう．

解

$2x^2+3xy-2y^2+x+7y=5$

$(x+2y)(2x-y)+x+7y=5$

$(x+2y)(2x-y)+3(x+2y)-1(2x-y)=5$

$\{(x+2y)-1\}\{(2x-y)+3\}+3=5$

$(x+2y-1)(2x-y+3)=2$

よって，

$x+2y-1$	1	2	-1	-2
$2x-y+3$	2	1	-2	-1

この中から $(x,\ y)$ が自然数になる場合を求めると，$(x,\ y)=(0,\ 1)$ と定まる．

■

注　まず，式変形の2行目から3行目にかけてが戸惑うかもしれない．次のようにして考えるのが良いだろう．

$$(x+2y)(2x-y)+x+7y$$
$$=(x+2y)(2x-y)+A(x+2y)+B(2x-y)$$

とおいて，x，y に関する恒等式とみて定数 A，B を定める．

また，変形した後の式

$(x+2y)(2x-y)+3(x+2y)-1(2x-y)=5$

は，$x+2y=X$，$2x-y=Y$ とおけば，

$$XY+3X-Y=5$$

となり，練習問題5の1次式の場合に他ならない．

□

次の問題も，上の例に従って因数分解ができるが，この場合，y の方が次数が低いので，まずは y で整理してみると，なかなかうまく処理できる．

練習問題 10

$2x^2-xy+y+1=0$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ を全て求めよ．

考え方

この場合も，左辺部をそのまま因数分解することは無理．平方完成や判別式も無理なようだ．

練習問題9の方法で解決するが，ここでは x と y の次数に注目する．y の方が次数が低いので，y で整理して考える．すると，$y=\dfrac{2x^2+1}{x-1}$ となるが，(分子の次数)>(分母の次数) だから，割り算を実行して次数を下げることを考えよう．分数式において分子の次数を下げるという手法は，整数問題に限らず頻繁に用いられる手法である．

解

y について解くと，$y=\dfrac{2x^2+1}{x-1}=2x+2+\dfrac{3}{x-1}$.
x，y は整数なので $x-1$ は3の約数である．これより $x-1=1,\ 3$ と定まる．このとき，それぞれに対して x，y を調べると，$(x,\ y)=(2,\ 9),(4,\ 11)$ となる．

■

注　練習問題9の方法で因数分解すると，

$2x^2-xy+y+1=0$

$x(2x-y)+y+1=0$

$x(2x-y)+2x-(2x-y)+1=0$

$\{x-1\}\{(2x-y)+2\}+2+1=0$

$(x-1)(2x-y+2)=-3$

となる．なかなかメンドウである．

□

次の問題は，積の形に持ち込む典型例である．左辺を因数分解，右辺を素因数分解して因数を比較する．この

ような問題が京都大の大問として出題されていることに驚くが，さすがに京都大だけあって，計算処理がやや面倒である．なお，99 年に同志社大（商）で「$x^3-y^3=98$ をみたす整数の組 $(x,\ y)$ を全て求めよ」という問題が出題されていた．

京大入試問題 1

$a^3-b^3=65$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．［2005 年前期文系］

$a^3-b^3=217$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．［2005 年前期理系］

考え方

左辺を $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ と因数分解し，右辺の素因数 $(65=5\times 13,\ 217=7\times 31)$ との組合せを考える．$a^2+ab+b^2=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\geqq 0$ にも注目する．

解

(1)

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$，　$65=5\cdot 13$ であり，$a^2+ab+b^2=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\geqq 0$ だから，

$a-b$	1	5	13	65
a^2+ab+b^2	65	13	5	1

と組み合わせが決まる．

$(a-b,\ a^2+ab+b^2)=(1,\ 65)$ のとき，

$a=b+1$ を $a^2+ab+b^2=65$ に代入して整理すると，

$$3b^2+3b=64$$

この式の左辺は 3 の倍数で，右辺は 3 の倍数でないから不適．

$(a-b,\ a^2+ab+b^2)=(5,\ 13)$ のとき，

$a=b+5$ を $a^2+ab+b^2=13$ に代入して整理すると，

$$b^2+5b+4=0$$

これより，$b=-1,\ -4$．

$(a-b,\ a^2+ab+b^2)=(13,\ 5)$ のとき，

$a=b+13$ を $a^2+ab+b^2=5$ に代入して整理すると，

$$3b^2+39b=-164$$

左辺は 3 の倍数で，右辺は 3 の倍数でないから不適．

$(a-b,\ a^2+ab+b^2)=(65,\ 1)$ のとき，

$a=b+65$ を $a^2+ab+b^2=1$ に代入して整理すると，

$$b^2+65b+\frac{65^2-1}{3}=0$$

ここで，この b についての 2 次方程式の判別式を D とすれば，

$$D=65^2-\frac{4(65^2-1)}{3}<0$$

となるので実数解をもたないので，整数解は存在しない．

以上より，$(a,\ b)=(4,\ -1),\ (1,\ -4)$

■

(2)

(1) の解答と同様であるので省略する．詳しい解答は各自で赤本等を参照せよ．

$(a,\ b)=(9,\ 8),\ (-8,\ -9),\ (6,\ -1),\ (1,\ -6)$

■

さて，積の形に持ち込む最大の目的は解の範囲を絞り込むことにあった．しかし積の形にできない場合もある．そんなときは不等式を利用して解の範囲を絞りこむ方法が用いられる．特に，与えられた方程式が対称式の場合，**文字の大小関係に着目して，整数解の存在範囲を絞り込む**方法もよく用いられる．

当たり前のことだが，**整数には最小値は存在しないが自然数には最小値が存在する**．最大値はどちらも存在しない．よって，自然数 n がある値 M 以下であることが示せれば，n の候補は絞られる $(1\leqq n\leqq M)$．したがって，文字の大小関係に注目して解の範囲を絞り込むには，大きい文字から順に消去していって，最初に 1 番小さい文字の範囲を決定する方法が用いられる（しかし，これはあくまでも一般論であって，どの文字で大小比較していくかは実際には試行錯誤による）．

次のような問題が（文系とはいえ）東大で出題されたことに驚く．

練習問題 11

n を正の整数とする．実数 $x,\ y,\ z$ に対する方程式

$$x^n+y^n+z^n=xyz \quad \cdots\cdots ①$$

を考える．

(1)　$n=1$ のとき，① を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で $x\leqq y\leqq z$ となるものを全て求めよ．

(2)　$n=3$ のとき，① を満たす正の整数の組

$(x,\ y,\ z)$ は存在しないことを示せ．

［2006 年東京大前期文系］

考え方

$x \leqq y \leqq z$ に注目して，z を消去することを考える．(1) は和で不等式を構成し，(2) は積で不等式を構成する．

解

(1)

$x \leqq y \leqq z$ より，$x+y+z \leqq z+z+z$ だから，$xyz \leqq 3z$ となり，$xy \leqq 3$．すなわち，$xy=1,\ 2,\ 3$ と定まる．このとき，$(x,\ y)=(1,\ 1), (1,\ 2), (1,\ 3)$ と確定し，それぞれに対して z を調べる．

■

(2)

$x \leqq y \leqq z$ より，$xyz \leqq z^3$ だから，$x^3+y^3+z^3 \leqq z^3$ となり，$x^3+y^3 \leqq 0$ となる．これをみたす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は存在しない．

■

✎注　なぜ z を利用して大小比較したのだろうか？簡単にいえばそれは「他の文字で大小比較するとうまくいかないから」である．試しに一度，x で大小比較してみよう．

$x \leqq y \leqq z$ より，$x+x+x \leqq x+y+z$ だから，$3x \leqq xyz$ となり，$3 \leqq xy$　……

文字の範囲を絞り込むことができないことに気付くであろう．先ほども述べたが，この大小関係の比較は，試行錯誤のうえに成せるものなので，実際にいろいろ試し，工夫する必要があるだろう．

□

応用問題 1

$n,\ a,\ b,\ c,\ d$ は 0 または正の整数であって，

$$n^2-6=a^2+b^2+c^2+d^2$$
$$n \geqq a+b+c+d$$
$$a \geqq b \geqq c \geqq d$$

をみたす．このような数の組 $(n,\ a,\ b,\ c,\ d)$ をすべて求めよ．［1980 年東京大文系］

考え方

第 1 式だけが $a^2,\ b^2,\ c^2,\ d^2$ に関する式で，他が $a,\ b,\ c,\ d$ に関する式であることに違和感を感じないだろうか？第 2 式を 2 乗して，$a^2,\ b^2,\ c^2,\ d^2$ の形を作って考えてみよ．自然に d が定まるであろう．

解

$$n^2-6=a^2+b^2+c^2+d^2 \quad \cdots ①$$
$$n \geqq a+b+c+d \quad \cdots ②$$
$$a \geqq b \geqq c \geqq d \quad \cdots ③$$

② より，

$$\begin{aligned} n^2 &\geqq (a+b+c+d)^2 \\ &= a^2+b^2+c^2+d^2 \\ &\quad +2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \\ &= n^2-6+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \end{aligned}$$

よって，$3 \geqq ab+ac+ad+bc+bd+cd$ …④

③ を利用して，

$$\begin{aligned} 3 &\geqq ab+ac+ad+bc+bd+cd \\ &\geqq d^2+d^2+d^2+d^2+d^2+d^2 \\ &= 6d^2 \end{aligned}$$

よって，$1 \geqq 2d^2$ となり，これをみたす d は $d=0$ と定まる．このとき，④ に $d=0$ を代入して，同様にすると，

$$\begin{aligned} 3 &\geqq ab+ac+bc \\ &\geqq c^2+c^2+c^2 \\ &= 3c^2 \end{aligned}$$

よって，$1 \geqq c^2$ となり，これをみたす c は $c=0,\ 1$ と定まる．

(i) $c=0$ のとき

④ より，$3 \geqq ab \geqq b^2$．これをみたす b は $b=0,\ 1$ と定まる．

$b=0$ のとき，$a^2=n^2-6$,　$a \leqq n$.　よって，$(n+a)(n-a)=6$ となるので，$(n+a,\ n-a)$ の組は，$(6,\ 1)$，$(3,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(1,\ 6)$ となるが，いずれの場合も $n,\ a$ は整数にならないので不適．

$b=1$ のとき，$a^2=n^2-7$,　$a \leqq n-1$．よって，$(n+a)(n-a)=7$ となるので，$(n+a,\ n-a)$ の組は，$(7,\ 1)$．このとき，$n=4$,　$a=3$ と定まる．

(ii) $c=1$ のとき

$3 \geqq ab+a+b \geqq b^2+2b$．これをみたす b は $b \geqq c=1$ より，$b=1$ と定まる．よって，$a^2=n^2-8$,　$a \leqq n-2$．よって，$(n+a)(n-a)=8$ となるので，$(n+a,\ n-a)$ の組は，$n-a \geqq 2$ より，$(4,\ 2)$．このとき，$n=3$,　$a=1$ と定まる．

以上より，

$$(n,\ a,\ b,\ c,\ d) =(4,\ 3,\ 1,\ 0,\ 0) =(3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0)$$

■

もし対称式であるにも係わらず，文字に大小関係が与えられていない場合には，**自分で大小関係を設定**し，最後にその設定を解除して整数解を求める必要がある．

練習問題 12
$\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$ を満たす自然数の組 $(l,\ m,\ n)$ は全部で何組あるか．

考え方

与えられた文字に大小関係が設定されていないので，自分で大小関係を設定して考える．

解

与式は対称式なので，$l \leqq m \leqq n$ と設定しても一般性を失わない． このとき，$\dfrac{1}{l} \geqq \dfrac{1}{m} \geqq \dfrac{1}{n}$ である．したがって，

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{l}+\frac{1}{l}+\frac{1}{l}$$

つまり，$1 \leqq \dfrac{3}{l}$ となり，$l \leqq 3$.

l は自然数だから，$l=1,\ 2,\ 3$ と定まる．

(i) $l=1$ のとき
$1+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$ より，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=0$ となり，これをみたす自然数 m，n は存在しない．

(ii) $l=2$ のとき
$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$ より，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2}$.
したがって，

$$mn=2m+2n$$
$$(m-2)(n-2)=4$$

と変形できて，$m \leqq n$ に注意して，組み合わせを考えると，$(m,\ n)=(3,\ 6),\ (4,\ 4)$.

(iii) $l=3$ のとき
$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$ より，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{2}{3}$.
したがって，

$$2mn=3m+3n$$
$$(2m-3)(2n-3)=9$$

と変形できて，$m \leqq n$ に注意して，組み合わせを考えると，$(m,\ n)=(3,\ 3)$.

以上より，$l \leqq m \leqq n$ のとき，
$(l,\ m,\ n)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$
と求まる．ここで，$(l,\ m,\ n)$ の大小関係をなくすと 10 組の解が存在することがわかる．

■

注 解の組が全部で 10 組あることについては大丈夫だろうが，念のため ……
$(l,\ m,\ n)=(2,\ 3,\ 6)$ のとき，異なる 3 文字の順列の総数なので $3!=6$ 組．
$(l,\ m,\ n)=(2,\ 4,\ 4)$ のときは，$\dfrac{3!}{1!2!}=3$ 組．
$(l,\ m,\ n)=(3,\ 3,\ 3)$ のときは 1 組．
よって，合計 10 組．

□

応用問題 2
n を正の整数とする．n^2+2 が $2n+1$ の倍数になる n を求めよ．

［1992 年一橋大前期］

考え方

なかなかな難問．つまり，$\dfrac{n^2+2}{2n+1}$ が整数になるような n を求めることである．(分子の次数)>(分母の次数) だから，先程の**練習問題** 10 の手法をとるのだが，実際に割り算を実行すると，商や余りの部分に分数が現れ，なかなかうまくいかない．分母の $2n+1$ が常に奇数であることに注目して，少し手を加える必要がある．

$$\frac{n^2+2}{2n+1}=\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}+\frac{\frac{9}{4}}{2n+1}$$

この式を見れば，両辺に何か数をかけたくならないだろうか．

解

$$\frac{n^2+2}{2n+1}=\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}+\frac{\frac{9}{4}}{2n+1}$$

両辺を 4 倍すると，

$$\frac{4(n^2+2)}{2n+1}=2n-1+\frac{9}{2n+1}$$

$2n+1$ は奇数なので，n^2+2 が $2n+1$ で割り切れる条件と，$4(n^2+2)$ が $2n+1$ で割り切れる条件とは同じである．よって，$2n+1$ は 9 の約数でなければならない．

n は自然数なので，$2n+1=3,\ 9$．$n=1,\ 4$.

■

注 この問題のポイントは

$$\frac{n^2+2}{2n+1}\text{が整数} \iff \frac{4(n^2+2)}{2n+1}\text{が整数}$$

であることにある．分母が奇数なので，分子に 4 をかけても整数かどうかに全く影響を及ぼさない．

□

次の京都大の問題は後期の理系の大問なので，一瞬身構えてしまうかもしれない．しかも「積の形をつくる」という原則に従おうとすると，なかなか積の形にならなくてますます焦ってくる！（ちなみに翌 02 年に愛媛大（前）で「$3x^2+y^2+5z^2-2yz-12=0$ をみたす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ をすべて求めよ．」という問題が出題された）

積の形も無理，大小比較も無理，となれば，次数が 2 次であることに注目して平方完成に持ち込む方法しか残らない．

京大入試問題 2

方程式
$$x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz+2yz-5=0$$
をみたす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ をすべて求めよ．

[2001 年後期理系]

考え方

右辺を x についての 2 次式とみて平方完成する．

解

x についての 2 次式とみて平方完成し，
$$\{x-(y+z)\}^2+y^2+z^2=5$$
と変形する．

$\{x-(y+z)\}^2 \geqq 0,\quad y^2 \geqq 0,\quad z^2 \geqq 0$ だから，平方数の和が 5 になる組合せは自ずと決まってしまう．よって，$(x,\ y,\ z)=(3,\ 1,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1)$.

（詳しい解答は各自で赤本等を参照せよ．）

■

さて，積の形にこだわるもう一つの理由は，次にあげる基本性質が成り立つからである．

▷Point◁

☆整数問題の第三原則☆

自然数 $a,\ b,\ c,\ d$ について，$a,\ b$ が互いに素であり，$ad=bc$ が成り立つとき，a は c の約数であり，b は d の約数である．つまり c は a で割り切れ，d は b で割り切れる．

感覚的に明らかであろう．簡単に説明すると，$d=\dfrac{bc}{a}$ と変形したとき，左辺は整数であるから，右辺は約分することによって整数にならざるをえないが，a と b が互いに素なので約分できないから，c が a で割り切れなければならない．

この性質は非常に重要で，**整数問題ではほとんど全ての問題でこの事実を使う**といっても過言ではない．なお，**互いに素**とは**最大公約数が** 1 または**共通の素因数を持たない**という意味である（互いに素については後ほど詳しく解説する）．

練習問題 13

正の整数 $m,\ n,\ l$ が等式
$$\frac{mn}{m+18}=l+\frac{1}{3}$$
を満たしているとき，m は 3 の倍数であることを示せ．

考え方

m が主役なので，まずは m について整理する．分母を払うと m についての 1 次式になる．

解

$$\begin{aligned}\text{与式}\quad &\Longleftrightarrow 3mn=(m+18)(3l+1)\\ &\Longleftrightarrow (3n-3l-1)m=2\cdot 9(3l+1)\end{aligned}$$

このとき，$3n-3l-1$ **は 3 で割ると 2 余る数なので，素因数分解したときに素因数 3 をもたない**ので，右辺の因数 9 と $3n-3l-1$ は互いに素なので，9 は m の約数．よって m は 9 の倍数であり，3 の倍数でもある．

■

ここで，最小公倍数，最大公約数の性質について確認しておこう．最小公倍数，最大公約数はその意味を簡単に小学校で学習しただけでそれ以降，本格的に扱うことはないが，以下の性質は常識として知っておいて欲しい．なお，証明は意外と難しい．

▷Point◁

☆最小公倍数・最大公約数の性質☆

$a,\ b$ の最小公倍数を L，最大公約数を G とおくとき，次が成立する．

性質 ①　$a,\ b$ の公倍数は L の倍数である．

性質 ②　$a,\ b$ の公約数は G の約数である．

性質 ③　$a=Ga',\ \ b=Gb'$ とおくとき，

a' と b' **は互いに素**である．

性質 ④　$L=Ga'b'$ が成立する．

性質 ⑤　$ab=GL$ が成立する．

練習問題 14

2 つの正の整数 m と n の最大公約数を G，最小公倍数を L とする．

$$\begin{cases}\log_3 L-\log_3 G=2+3\log_3 2\\ \log_2 L+\log_2 G=7+4\log_2 3\end{cases}$$

が成り立つとき，$G<m<n<L$ として，m，n を求めよ．

［2001 年慶応大（商）］

考え方

まずは，対数を消去する（この対数は単なる見掛け倒し）．

解

与式より，

$$\frac{L}{G}=2^3 3^2,\quad GL=2^7 3^4$$

なので，$G=12$ と定まる．

$m=pG$，$n=qG$（p，q 互いに素）とすると，$L=pqG$ だから，

$$pq=2^3 3^2$$

$G<m<n<L$ から $1<p<q<pq$ となるので，p と q が互いに素であることから，$p=8$，$q=9$ と定まる．よって，$m=96$，$n=108$

■

次の大阪大の問題は，一瞬難しそうに思えるが，落ち着いて，最大公約数の意味を考えれば，ほとんど自明なことである．しかし，きちんとした答案を書くのは，文系には少し難しいかもしれない．

応用問題 3

自然数 m に対して，m の相異なる素因数をすべてかけあわせたものを $f(m)$ で表すことにする．たとえば $f(72)=6$ である．ただし $f(1)=1$ とする．m，n を自然数，d を m，n の最大公約数とするとき $f(d)f(mn)=f(m)f(n)$ となることを示せ．

［2003 年大阪大前期文系］

考え方

最大公約数とは，共通に現れる因数のことである．本問の場合，素因数だけに注目するので（指数は考慮しない），m，n の両方に共通に表れる素因数，m にだけ表れ n に表れない素因数，m にだけ表れ n に表れない素因数に注目すればよい．

解

素因数に注目する（指数は考慮しない）．m，n に現れる素因数で，両方に共通に表れるものの積を p，m にだけ表れ n に表れない素因数の積を q，m にだけ表れ n に表れない素因数の積を r とすると，

$$f(d)=p,\ f(mn)=pqr,\ f(m)=pq,\ f(n)=pr$$

となる．

よって，$f(d)f(mn)=f(m)f(n)$ が成立する．

■

▷Point◁

☆整数問題の第四原則☆

1 以外の全ての自然数は，素数の積に分解できる．そのような分解の方法は，並べ方の順序を除いて，ただ一通りである．

素因数分解の一意性

素因数分解の一意性とは，簡単にいうと、**自然数はただ一通りに素因数分解できる**ということである．よって，両辺の素因数の指数の比較が可能となり，実数の場合には解くことのできない方程式を解くことができる．なお，素因数分解の指数は 0 以上で，この指数に注目することが重要である．

練習問題 15

$7056=2^a\ 3^b\ 5^c\ 7^d$ をみたす整数 a，b，c，d を求めよ．

解

左辺を素因数分解すると，$7053=2^4\ 3^2\ 7^2$ となるので，両辺の指数を比較して，$a=4$，$b=2$，$c=0$，$d=2$．

■

練習問題 16

p を自然数の定数とする．$2^m-2^n=2^p$ をみたす 0 以上の整数 m，n を求めよ．

考え方

まずは積の形に持ち込むことを考えよう．

解

左辺を 2^n でくくりだすと $2^n(2^{m-n}-1)=2^p$ となる（積の形にする！）．$2^{m-n}-1$ は奇数であることから，$2^{m-n}-1=1$ になるしかなく，$n=p$，$m-n=1$ より，$n=p$，$m=p+1$ と定まる．

■

練習問題 17

$2^m n-2^{m-1}=1000$ が成り立つとき，正の整数 m，n を求めよ．

考え方

先ほどと同様に積の形に持ち込むことを考えよう．

解

$2^{m-1}(2n-1)=2^3 5^3$ だから，$2^{m-1}=2^3$，$2n-1=5^3$．したがって，$m=4$，$n=63$．

■

練習問題 18

2 つ以上の連続する自然数の和は 2^k（k は自然数）の形にはならないことを証明せよ．

解

a から始まる連続する $n(\geqq 2)$ 個の整数の和は，

$$a+(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+(n-1))=\frac{n(2a+n-1)}{2}$$

である（a は自然数）．$\dfrac{n(2a+n-1)}{2}=2^k$ になったとすると，$n(2a+n-1)=2^{k+1}$ となる．$n\geqq 2$ だから，$n=2^p$（$p\geqq 1$）となり，このとき，$2a+n-1$ は奇数になるので，$n=2^{k+1}$，$2a+n-1=1$．よって，$2a=2-2^{k+1}$ より，$a=1-2^k$．これは k と a が共に自然数であることに矛盾する．

■

素因数分解の一意性を利用すれば，これまで「背理法」の定番であった次の問題も，簡単に解決する．

練習問題 19

$\sqrt{2}$ が無理数であることを，素因数分解の一意性を利用して証明せよ．

解

$\sqrt{2}$ が有理数だと仮定し $\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$（m，n は互いに素）とおけば，$2m^2=n^2$ となる．両辺の素因数 2 の個数に着目すると，左辺が奇数個，右辺が偶数個なので矛盾．

■

応用問題 4

$$m^2=2^n+1$$

を満足する正の整数 m，n の組をすべて求めよ．

［1982 年学習院大（経）］

考え方

本問も「積の形をつくる」という基本原則に従うのだが，どのように変形すれば良いのだろうか．

もし，変形にどうしても気付かない場合のアプローチは別解に紹介してある．これは m，n の偶奇性（偶数なのか奇数なのか）をまず考える方法である．m，n のどちらかの偶奇性は確定する．

解

与式より

$$(m+1)(m-1)=2^n\ \text{（偶数）}$$

であり，$(m+1)+(m-1)=2m$（偶数）なので，$m+1$ と $m-1$ は共に偶数である．したがって，

$$\begin{cases} m+1=2^\alpha \\ m-1=2^\beta \end{cases}$$

とおける（$\alpha>\beta\geqq 1$）．このとき，

$$2^\alpha-2^\beta=2$$
$$2^\beta(2^{\alpha-\beta}-1)=2$$

だから，$2^{\alpha-\beta}-1$ は奇数なので，

$$2^\beta=2,\quad 2^{\alpha-\beta}-1=1$$

となり，$\alpha=2$，$\beta=1$．

よって，$m=n=3$ である．

■

解

$$m^2 = 2^n + 1$$

2^n+1 は奇数なので，m^2 は奇数．よって，m も奇数である．

$m = 2k-1$(k は自然数) とおくと，

$$(2k-1)^2 = 2^n + 1$$
$$4k^2 - 4k = 2^n$$
$$\therefore \quad k(k-1) = 2^{n-2}$$

k，$k-1$ は連続する 2 整数だから，一方が奇数で，他方が偶数．

したがって，

$$k = 2^{n-2}, \quad k-1 = 1$$
$$\therefore \quad k = 2,\ n = 3$$

よって，$m = n = 3$ となる．

■

応用問題 5

自然数 a，b，c が $3a = b^3$，$5a = c^2$ を満たし，d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d=1$ に限るとする．

(1) a は 3 と 5 で割り切れることを示せ

(2) a の素因数は 3 と 5 以外にないことを示せ．

(3) a を求めよ．

［2006 年東工大後期］

考え方

自然数 a，b，c に関する条件が述べられたあと，なぜ，いきなり d なんて文字の説明があるのだろうか．「d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d=1$ に限る」とは何を意味しているのか正しく解釈できるだろうか．

解

$$3a = b^3 \cdots\cdots ① \quad 5a = c^2 \cdots\cdots ②$$

(1)

① より，b^3 は 3 で割り切れるが，3 は素数なので，b が 3 で割り切れる．よって $b = 3k$ とおくと，① より $a = 9k^3$ となるので，a は 9 で割り切れる．つまり a は 3 で割り切れる．

また，② より，c^2 は 5 で割り切れるが，5 は素数なので，c が 5 で割り切れる．よって $c = 5l$ とおくと，① より $a = 5l^2$ となるので，a は 5 で割り切れる．

つまり a は 3 と 5 で割り切れる．

(2)

a が 3 と 5 以外の素因数 p をもつとする．a を素因数分解したときの p の指数を e とする．

① より，b も素因数 p をもつことになり，その指数を f とすれば，$e = 3f$ となる．

また，② より，c も素因数 p をもつことになり，その指数を g とすれば，$e = 2g$ となる．

よって，e は 2 でも 3 でも割り切れるから，6 で割り切れることになり，$e \geqq 6$．つまり a は p^6 で割り切れることになる．しかし，d^6 が a を割り切るような自然数が $d=1$ に限られることに反する．

したがって，a は 3 と 5 以外の素因数をもたない．

(3)

以上より，$a = 3^m 5^n$（m，n は 5 以下の自然数）と表される．① より，$3^{m+1}5^n = b^3$ だから，$m+1$ と n は 3 で割り切れ，② より，$3^m 5^{n+1} = c^2$ だから，m と $n+1$ は 2 で割り切れる．よって，$m=2$，$n=3$ と定まり，$a = 2^2 5^3 = 1125$

■

以上で整数問題の大原則は終了である．ここで，これまでに紹介した大原則をもう一度まとめておこう．

▷Point◁

☆整数問題の第一原則☆

整数は幅 1 でトビトビに存在する．

整数の離散性

☆整数問題の第二原則☆

整数問題では『積の形』をつくる．

☆整数問題の第三原則☆

自然数 a，b，c，d について，a，b が互いに素であり，$ad = bc$ が成り立つとき，a は c の約数であり，b は d の約数である．つまり c は a で割り切れ，d は b で割り切れる．

☆整数問題の第四原則☆

1 以外の全ての自然数は，素数の積に分解できる．そのような分解の方法は，並べ方の順序を除いて，ただ一通りである．

素因数分解の一意性

いずれも整数問題を解く上で基本となる考え方である．しっかりと理解しておこう．

さて，最後に，以上の4つの大原則よりさらに重要な，整数問題を解く上での根本的な大原則を述べておく．

▷Point◁

☆整数問題の大原則☆

整数問題を解くには，まずは具体例を考えることが鉄則．とにかく，具体的にいろんな数を当てはめて実験すること．そうすれば必ず，規則性や法則が見えてくるはず．式変形だけでは絶対に無理である．

整数問題に限らず，見たこともないような問題に出会ったらどう対応すればよいのか．それは，まず具体例を考えることである．特に整数問題では，この作業がとても大切になってくる．とにかく数字を当てはめて実験（計算）し，規則性や法則を予想すること．

しかし，単に予想しただけでは数学にならないので，最後に証明が必要である．証明がわからなかったら，まずは具体例を証明してみよう．その証明方法を一般的な場合に拡張すればよいのだ．

整数問題攻略の基本スタイル

具体例で実験 $\Longrightarrow$ 法則を予想 $\Longrightarrow$ 証明

という流れをつねに意識しておこう．

さて，30年以上前に，京大で次のような問題が出題されていた．

京大入試問題 **3**

$\dfrac{2^n}{n} > n$ をみたす自然数 n の範囲を求めよ．

［1979年文系］

考え方

当然ながら，この不等式を解くことはできない．不可能である．やはり，$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$ と実験して，適する n の範囲を予測し，その後，証明するという方法をとる．証明は数学的帰納法を用いるのが良いだろう．

解

$\dfrac{2^n}{n} > n$ より，$2^n > n^2 \cdots$①．まず，①は，$n=1$ のときに成立し，$n=2,\ 3,\ 4$ のときは成立しない．次に，$n \geqq 5$ で常に①が成立することを数学的帰納法で証明する．

(i) $n=5$ のとき，$2^5 > 5^2$ より，①は成立する．

(ii) $n=k(\geqq 5)$ のとき①が成立すると仮定すると，

$$2^k > k^2$$

であり，このとき，

$$2k^2-(k+1)^2 = k^2-2k-1 = (k-1)^2-2 > 0 \quad (k \geqq 5)$$

だから，$2k^2 > (k+1)^2$．よって，

$$2^{k+1} > 2k^2 > (k+1)^2$$

となるので，$n=k+1$ のときも①は成立している．

したがって，$n \geqq 5$ で①は成立する．

以上より，条件をみたす自然数 n の範囲は，

$$n=1,\ n \geqq 5$$

である．

■

注　なお，この問題は次のように微分の考えを利用して，解析的に処理することも可能である．つまり，$2^n > n^2$ より，両辺の自然対数をとると，$n\log 2 > 2\log n$ だから，

$$\frac{\log 2}{2} > \frac{\log n}{n}$$

ここで，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおけば，問題は，$f(2)>f(n)$ となる n を求めることになる．

そこで，$f(x)$ を微分して増減を調べれば（数学 III の範囲），

$$f(1)<f(2)<f(3)>f(4)>f(5)>f(6)>\cdots$$

であることがわかり，さらに $f(2)=f(4)$ になるので，$f(2)>f(n)$ となる n は $n=1,\ n \geqq 5$ であることがわかる．

□

応用問題 6

正の整数の下2桁とは，100の位以上の数字を無視した数をいう．たとえば2000，12345の下2桁はそれぞれ0，45である．m が正の整数全体を動くとき，$5m^2$ の下2桁として現れる数をすべて求めよ．

［2007年前期東大文系］

考え方

「m が正の整数全体を動くとき，$5m^2$ の下2桁として現れる数をすべて求めよ」という問題文を読んで，どう

感じるだろうか．「難しい」とか「無理だ」とは思わないでほしい．僕はこう考える．「正の整数は無限個ある．無限個すべてを確認することは不可能だ．でもすべて求めよ，と書いてある．ということは，何か規則性があるはずだ！」と．そして，次にやることは，その規則性を発見するための実験である．

ところがこの実験がクセモノで，ちょっと実験したくらいでは全く規則が見えてこない．この問題では少なくとも $m=1$〜12 くらいまでは実際に計算しないと駄目である．そうすれば，やっとこさ下 2 桁の数が周期 10 で巡回していることに気づく．この周期性を証明することがこの問題のポイント．つまり，具体的に 10 個を計算して，次に周期が 10 であることを示すこと．

以上の膨大な計算実験や試行錯誤を経て，ようやく次のような解答が出来上がる．模範解答はきわめてシンプル．しかし，この試行錯誤なしに模範解答を見ても，全く理解できないと思う．

問題文と解答の間には，表面には出てこないが，膨大な試行錯誤があるのである．どれだけ自分で頭と手を動かして考えたのかが重要なのであって，そのことを思い知らされるという意味で啓蒙的な問題である．

解

$m=10a+b$（a，b は負でない整数で $0 \leqq b \leqq 9$）とおくと，

$$\begin{aligned}5m^4 &= 5(10a+b)^4\\ &= 5(10000a^4+4000a^3b+600a^2b^2+40ab^3+b^4)\\ &= 100(500a^4+200a^3b+30a^2b^2+2ab^3)+5b^4\end{aligned}$$

よって，$5m^4$ の下 2 桁は $5b^4$ の下 2 桁に等しい．

b	$5b^4$	$5b^4$ の下 2 桁
0	0	0
1	5	5
2	80	80
3	405	5
4	1280	80
5	3125	25
6	6480	80
7	12005	5
8	20480	80
9	32805	5

上の表より，答えは，0，5，25，80

■

以上で整数問題の攻略（原則編）は終了である．引き続いて，整数問題の攻略（基礎編）に取り組もう．