互いに素（Part.1）

整数問題の様々な場面で，2つの整数が「互いに素」であるかどうかが重要な意味をもつことが多々あります．

1　「互いに素」とは

まずは「互いに素」の意味を確認しよう．一般的には次のような定義になるでしょう．

▷Point◁（「互いに素」の定義）

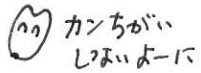
a，b が互いに素であるとは，…

定義 ①　a，b が 1 以外の公約数をもたない

定義 ②　a，b の最大公約数が 1 である

要するに，「共通に割れる 2 以上の整数がない」ということです．

➪注　「互いに素」を「互いに素数」と勘違いしている人が意外と多いです．例えば，8 や 15 は素数ではありませんが，8 と 15 は互いに素です．注意しよう．もちろん，2 つの異なる素数は「互いに素」です．



2　「互いに素」の証明方法

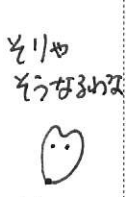
では，上のように定義した場合，互いに素であることの証明はどのようになるでしょうか．おそらく，次のような論法になるでしょう．

☆定義 ① を用いた証明方法☆

a，b が 1 以外の公約数 d をもつと仮定して矛盾を示す．

☆定義 ② を用いた証明方法☆

a，b の最大公約数を G とおいて $G=1$ であることを示す．



これらの証明の筋道は間違いではありません．この方法で上手くいく場合もあります．しかし，実際にいろんな問題にあたると，上手くいかない場合のほうが多いことに気付くと思います．それは公約数や最大公約数をただ漠然と設定したことに原因があります．

そこで次のように定めます．

▷Point◁（「互いに素」の新定義）

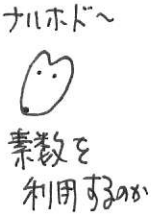
a，b が互いに素であるとは，a，b が共通の素因数 p をもたないことである．

素因数とは素数の約数のこと．つまり，公約数を単に「1 以外の整数」とするのではなく，「素数」と定義するのです．よって，「互いに素であること」を証明するには，「互いに素ではない」つまり「共通の素因数 p をもつ」と仮定して矛盾を導けばよいのです．

▷Point◁

☆「互いに素」であることの証明方法☆

背理法による．つまり，a，b が共通の素数 p で割り切れると仮定して矛盾を示す．



いわば，素数の力を借りて証明するのです．この考え方はすごく大事で，この証明方法を用いるとうまくいく場合が多いです（もちろん例外もあります．上手くいかないときに最初の定義 ① や，定義 ② による証明や別証明を考えよう）．

「互いに素」の証明の前に，次の基本定理を確認しておこう．これらの基本性質は，ほとんど全ての整数問題に関係するといっても過言ではありません．

▷Point◁（整数の基本性質）

A と B が互いに素な整数のとき，AC が B で割り切れるならば，C は B で割り切れる．

AC が B で割り切れるとき，$\dfrac{AC}{B}$ は整数になるが，A と B が互いに素なので約分できないから，C が B で割り切れなければならないということです．

▷Point◁（素数の基本性質）

p を素数とするとき，ab が p の倍数ならば，a または b が p の倍数である．

特に，a，b が自然数で $ab=p$ のとき，$(a,\ b)=(1,\ p)$ または $(p,\ 1)$

これらの性質をうまく利用して，互いに素であることの証明をします．まずは，典型的な証明方法を

具体例を通して覚えてしまおう．

例題 1. 次のことを示せ．
(1) 連続する2つの自然数は互いに素である．
(2) 連続する2つの奇数は互いに素である．

考え方 共通の素因数 p をもったと仮定して矛盾を示します．

解 (1) 連続する2つの自然数 n と $n+1$ が互いに素でないと仮定すると，共通の素因数 p が存在し，

$$n=p\alpha \quad n+1=p\beta$$

となる．このとき，$p(\beta-\alpha)=1$ となるので $p\geqq 2$ より矛盾．よって，連続する2つの自然数は互いに素である．

➪**注** 次の紹介する **別解** も重要な論法です．

別解 n の素因数を小さいほうから順番に，p_1, p_2, …, p_k とする．これら全ての素因数で $n+1$ を割ると，いずれの場合も1余る．よって，n と $n+1$ に共通の素因数は存在しないので，互いに素である．

■

(2) 連続する2つの奇数 $2k-1$ と $2k+1$ が互いに素でないと仮定すると，共通の素因数 p が存在し，

$$2k-1=p\alpha \quad 2k+1=p\beta$$

となる．このとき，$p(\beta-\alpha)=2$．p は奇素数なので $p\geqq 3$ より矛盾．よって，連続する2つの奇数は互いに素である．

■

例題 2. a, b が互いに素であるとき，
(1) $a+b$, ab は互いに素であることを示せ．
(2) a^2+b^2, ab は互いに素であることを示せ．

とても有名・重要・基本的な証明

考え方 もちろん背理法です．つまり，共通の素数 p で割り切れると仮定して矛盾を示そう．

解 (1) $a+b$, ab が互いに素でないと仮定すると，共通の素因数 p が存在し，

$$a+b=pm\cdots① \quad ab=pn\cdots②$$

となる．② より，a または b が素数 p で割り切れる．a が p で割り切れるとき，① より $b=pm-a$ だから，b も p で割り切れることになり，a, b が互いに素であることに矛盾する．b が p で割り切れる場合も同様である．

p が素数だから言えることです

したがって，$a+b$, ab は互いに素である．

■

(2) a^2+b^2, ab が互いに素でないと仮定すると，共通の素因数 p が存在し，

$$a^2+b^2=pm\cdots③ \quad ab=pn\cdots④$$

となる．④ より，a または b が素数 p で割り切れる．a が p で割り切れるとき，$a=p\alpha$ とおいて③に代入すると，$b^2=pm-p^2\alpha^2=p(m-p\alpha^2)$．よって b も p で割り切れることになり，a, b が互いに素であることに矛盾する．b が p で割り切れる場合も同様である．

p が素数だから言えることです

したがって，a^2+b^2, ab は互いに素である．

■

➪**注** もし「素因数」ではなく，単なる「公約数」と設定したらどうなっていたでしょうか．ちょっとやってみましょう．

誤答 $a+b$, ab が互いに素でないと仮定すると，1以外の公約数 d が存在し，

$$a+b=dm\cdots① \quad ab=dn\cdots②$$

となる．② より，a または b が d で割り切れ・・・・るわけない！！！ **ab が整数 d で割り切れるとき，a または b が d で割り切れるとは限りません．** 例えば，ab が6で割り切れるとき，a または b が6で割り切れるとは限りません．先ほどの **解** のように，公約数を「素数」と設定していれば話が進みますが，d は素数ではないので，話が全く進まないことがわかるでしょう．

➪**注** 上の **例題 2.** は逆も成立します．つまり，必要十分条件です．

$a+b$, ab が互いに素 $\Longleftrightarrow$ a, b は互いに素
a^2+b^2, ab が互いに素 $\Longleftrightarrow$ a, b は互いに素

証明は対偶をとることで簡単に示せるので各自でやっといてください．

はーい