まず，a または b が 1 のときは明らか．それ以外の場合を考えると，a が平方数でなければ，a を素因数分解したとき，ある素数 p で「p の奇数乗」という因数が現れるはずである．ところが，a，b が互いに素だから，b は p を因数にもつことはなく，結局，ab を素因数分解したときも，やはり p の指数は奇数のはず．これは右辺が平方数 (全ての指数が偶数) であることに矛盾．よって a は平方数．同様に b も平方数．

■

例題 5.　連続する 2 つの自然数の積は平方数にはならないことを示せ．

考え方 やはり，連続する 2 つの自然数は互いに素であることを用います．

解　積 $n(n+1)$ が平方数になったと仮定すると，連続する 2 つの自然数 n，$n+1$ が互いに素なので n も $n+1$ それぞれ平方数になる．

よって，$n=a^2$，$n+1=b^2$ とすると，

$a^2+1=b^2$．　$\therefore\ (b+a)(b-a)=1$．

この式を満たす自然数 a，b は存在しない．よって，n と $n+1$ がともに平方数になることはない．

したがって，連続する 2 つの自然数の積は平方数にはならない．

■

この問題には様々な別解があります．勉強のために紹介しておこう．

まず，連続する 2 つの自然数の積が平方数になったとして矛盾を示します．つまり，$n(n+1)=m^2$ とおいて，この式をみたす m，n が存在しないことを示すのです．そのために n の 2 次式とみて平方完成します．

別解 1

$\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2-m^2=\dfrac{1}{4}$

$\left(n+\dfrac{1}{2}+m\right)\left(n+\dfrac{1}{2}-m\right)=\dfrac{1}{4}$

$(2n+1+2m)(2n+1-2m)=1$

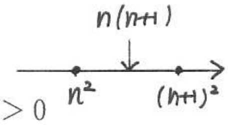
$2n+1+2m=1$ かつ $2n+1-2m=1$ を満たす自然数 m，n は存在しない．

これはこれで 大切な証明です　OK

■

また，$n^2<n(n+1)<(n+1)^2$ であることに気づけば $n(n+1)$ が平方数にならないことは明らかです (このことを整数の離散性と言います)．

別解 2



$n(n+1)-n^2=n>0$

$(n+1)^2-n(n+1)=n+1>0$

よって，$n^2<n(n+1)<(n+1)^2$．

$n(n+1)$ は連続する 2 つの平方数の間に入っているので，$n(n+1)$ が平方数になることはない．

実に ウマイ 証明

■

参考 2012 年の東大理系第 4 問で類題が出題されています．

n を 2 以上の整数とする．自然数 (1 以上の整数) の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする．以下の問いに答えよ．

(1)　連続する 2 個の自然数の積は n 乗数ではないことを示せ．

(2)　連続する n 個の自然数の積は n 乗数ではないことを示せ．

[東京大学 2012 年前期理系]

平方数ではなく一般的に n 乗数でも成立するようですね．興味のある人はぜひ挑戦してみてください ((2) はムズイので (1) だけでも)．

例題 6.　a，b，c はどの 2 つも互いに素な自然数で，$a^2+b^2=c^2$ をみたすものとする．このとき次の問いに答えよ．

(1) a，b が共に奇数であるということはありえないことを証明せよ．

(1) a，b のうち偶数である方を d とする．このとき，$c+d$，$c-d$ は共に平方数であることを示せ．

(1)は どっかで 見覚えある…

(2)は…?

考え方 (1) は，『平方数の分類』で終わり．

(2) は，(1) の結果と a，b が互いに素であることより，一方が偶数，もう一方が奇数．a，b のうち偶数を d，奇数を e とおくと，

$$d^2+e^2=c^2 \Longleftrightarrow e^2=(c+d)(c-d)$$

となり，$c+d$ と $c-d$ が互いに素であることが証

明できれば，$c+d$ と $c-d$ は共に平方数であるといえます．なお，$c+d$，$c-d$ は共に奇数であることに注意しよう．

解 (1) a，b が共に奇数であるとき，a^2 も b^2 も 4 で割ると 1 余るので，a^2+b^2 は 4 で割ると 2 余る数である．平方数を 4 で割った余りは 0 か 1 なので，4 で割ると 2 余る数は平方数にはならない．よって，$a^2+b^2=c^2$ は成立しないので，a，b が共に奇数であるということはありえない．

(2) a，b が互いに素だから，共に偶数ということはないので，一方が偶数，もう一方が奇数になる．a，b のうち偶数を d，奇数を e とおくと，

$$d^2+e^2=c^2 \Longleftrightarrow e^2=(c+d)(c-d)$$

となり，$c+d$，$c-d$ が互いに素であることが証明できれば，$c+d$，$c-d$ は共に平方数であるといえる．

$c+d$，$c-d$ が共通の素因数 p をもつと仮定すると，$c+d=p\alpha$，$c-d=p\beta$ となるので，$2c=p(\alpha+\beta)$．$c+d$，$c-d$ は共に奇数なので，素因数 $p \neq 2$ なので，c が p で割り切れる．このとき，d も p で割り切れることになり，c と d が互いに素であることに矛盾する．

よって $c+d$，$c-d$ が互いに素になるので，$c+d$，$c-d$ は共に平方数である．

■

例題 7. 自然数 a，b，c について，等式 $a^2+b^2=c^2$ が成り立ち，かつ a，b は互いに素とする．このとき，次のことを証明せよ．

(1) a が奇数ならば，b は偶数であり，したがって c は奇数である．

(2) a が奇数のとき，$a+c=2d^2$ となる自然数 d が存在する．

［京都大学 1999 年後期文系］

うわっ
これも
文系!!
マジ？

考え方 (1) は，これまた『平方数の分類』で終わり．

(2) は，$\dfrac{a+c}{2}$ が平方数になることを示せばよいです．$a^2+b^2=c^2$ より，

$$\left(\frac{c+a}{2}\right)\left(\frac{c-a}{2}\right)=\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

と変形できます（この変形がポイント）．a，c が奇数，b は偶数なので，$\dfrac{c+a}{2}$，$\dfrac{c-a}{2}$，$\dfrac{b}{2}$ はいずれも自然数なので，$\dfrac{c+a}{2}$ と $\dfrac{c-a}{2}$ が互いに素であることが証明できれば，$\dfrac{c+a}{2}$ と $\dfrac{c-a}{2}$ が共に平方数であることが証明できます．

解 (1) a が奇数のとき，b も奇数だとすると，a^2 も b^2 も 4 で割ると 1 余るので，a^2+b^2 は 4 で割ると 2 余る数である．平方数を 4 で割った余りは 0 か 1 なので，4 で割ると 2 余る数は平方数にはならない．よって，$a^2+b^2=c^2$ は成立しないので，a，b が共に奇数であるということはありえない．つまり，a が奇数ならば，b は偶数であることがわかる．このとき，a^2+b^2 は奇数になるので，c は奇数である．

(2) $a^2+b^2=c^2$ より，

$$\left(\frac{c+a}{2}\right)\left(\frac{c-a}{2}\right)=\left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \cdots①$$

この因数分解は
なかなか
気付かんわ

である．(1) より，a，c が奇数，b は偶数なので，$\dfrac{c+a}{2}$，$\dfrac{c-a}{2}$，$\dfrac{b}{2}$ はいずれも自然数である．

$\dfrac{c+a}{2}$ と $\dfrac{c-a}{2}$ が互いに素であることを証明する．

$\dfrac{c+a}{2}$ と $\dfrac{c-a}{2}$ が互いに素でないと仮定すると，共通の素因数 p が存在し，

$$\frac{c+a}{2}=pm, \quad \frac{c-a}{2}=pn$$

となる．これより，

$$a=p(m-n), \quad c=p(m+n) \quad \cdots②$$

となるので，a も c の p の倍数である．

さて，② を $a^2+b^2=c^2$ に代入すると，$b^2=4p^2mn$，つまり

$$\left(\frac{b}{p}\right)^2=4mn$$

だから，b もまた p の倍数となり，a，b は互いに素であることに矛盾する．

よって，$\dfrac{c+a}{2}$ と $\dfrac{c-a}{2}$ が互いに素であることが示された．

したがって，① より，$\dfrac{c+a}{2}$ と $\dfrac{c-a}{2}$ は共に平方数であるので，$\dfrac{c+a}{2}=d^2$，つまり，$c+a=2d^2$ となる d が存在する．

■

昔の京大は 文系でも
キョーレツな 整数問題が
出てたんですね

今は昔の話？