座標筆算法

a と b が互いに素であるとき，$ax+by=1$ を満たす整数 x，y は必ず存在することが知られています．このことをテーマにした問題では「まずは x と y を 1 組見つけること」が最優先課題でした．a と b が小さい数字ならばカンで見つかると思いますが，デカイ数字になるとお手上げです．

教科書や参考書には，「『ユークリッドの互除法』の逆をたどれば求められる」と書いてありますが，かなりメンドウで時間がかかります．そこで，『座標筆算法』(命名したのは私) という技を紹介します．

具体例を通して考えてみよう．

例題　$45x+32y=1$

教科書通りに『ユークリッドの互除法』の逆をたどって求めてみよう．

まずは，『ユークリッドの互除法』を実行します (余りが 1 になった時点でストップします)．

$$\begin{aligned} 45 &= 32\times1+13 \\ 32 &= 13\times2+6 \\ 13 &= 6\times2+1 \end{aligned}$$

「余り $=\cdots$」の形に変形して

$$\begin{aligned} 13 &= 45-32\times1 &&\cdots\cdots① \\ 6 &= 32-13\times2 &&\cdots\cdots② \\ 1 &= 13-6\times2 &&\cdots\cdots③ \end{aligned}$$

③ からスタートします．

$$\begin{aligned} 1 &= 13-6\times2 &&\longleftarrow \text{数字"6"に ② を代入} \\ &= 13-(32-13\times2)\times2 \\ &= 13\times5-32\times2 &&\longleftarrow \text{数字"13"に ① を代入} \\ &= (45-32\times1)\times5-32\times2 \\ &= 45\times5-32\times7 \\ &= 45\times5+32\times(-7) \end{aligned}$$

よって，$45x+32y=1$ を満たす x，y として

$$(x,\ y)=(5,\ -7)$$

が得られます．

まあ，単純な式変形なので，落ち着いて計算すればできますが，ちょっとメンドウです．今回は『ユークリッドの互除法』の計算を 3 回するだけで余り 1 が登場しましたが，もしも 4 回，5 回と式が増えてくると大変です．

そこで役に立つのが『座標筆算法』です．

まずは，『ユークリッドの互除法』を筆算で書いてみます (余りが 1 になった時点でストップします)．

ユークリッドの互除法の筆算

$$\begin{array}{r|r|r|r} & 2 & 2 & 1 \\ \hline 6 & 13 & 32 & 45 \\ & 12 & 26 & 32 \\ \hline & 1 & 6 & 13 \end{array}$$

実は，この筆算式に少し手を加えるだけで，$45x+32y=1$ を満たす x，y を見つけることができるのです．

たとえば，数字 45 は $45x+32y$ に $x=1$，$y=0$ を代入すれば得られます．ここで，数字 45 に座標 $(1,\ 0)$ を対応させます．

$$45=45\times1+32\times0 \iff (1,\quad 0)$$

同様に数字 32 は $45x+32y$ に $x=0$，$y=1$ を代入すれば得られるので，数字 32 には座標 $(0,\ 1)$ が対応します．

$$32=45\times0+32\times1 \iff (0,\quad 1)$$

では，差 $45-32=13$ はどうなるのかと言うと，

$$\begin{array}{rr} & 45=45\times1+32\times0 \\ -\big) & 32=45\times0+32\times1 \\ \hline & 13=45\times1+32\times(-1) \end{array}$$

なので，数字 13 には座標 $(1,\ -1)$ が対応します．つまり，座標をそのまま引いただけに過ぎません．

$$\begin{array}{rccc} & 45 & \iff & (1,\quad 0) \\ -\big) & 32 & \iff & (0,\quad 1) \\ \hline & 13 & \iff & (1,\ -1) \end{array}$$

また，13 の 2 倍の 26 は，座標 $(2,\ -2)$ に対応することも容易に分かると思います．

$$\begin{aligned} 13 &= 45\times1+32\times(-1) \iff (1,\ -1) \\ 26 &= 45\times2+32\times(-2) \iff (2,\ -2) \end{aligned}$$

この計算法則を用いて，『ユークリッドの互除法』の筆算式を，座標で計算し直してみよう．数字を座標に置き換えて，座標のままで計算するのです．

Step ①　まずは，フツーに筆算します．余りが 1 になった時点でストップします．

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 2 & 2 & 1 \\ \cline{2-4}
6 \,\big) & 13 \,\big) & 32 \,\big) & 45 \\
 & 12 & 26 & 32 \\ \cline{2-4}
 & 1 & 6 & 13
\end{array}
$$

最上段に表れる商 (2，2，1) を使います．．この商の値と順番が重要な意味を持ちます．

Step ②　45 $\Longleftrightarrow$ (1，0)，32 $\Longleftrightarrow$ (0，1) と対応していることを確認し，座標筆算をスタートします．まず，(1，0) ÷ (0，1) を筆算で計算します．最初の商は 1 です．

$$
\begin{array}{rr}
 & 1 \\ \cline{2-2}
(0,\ 1)\,\big) & (1,\ 0) \\
 & (0,\ 1) \\ \cline{2-2}
 & (1,\ -1)
\end{array}
$$

Step ③　余り (1，−1) を (0，1) の左側に書いて，引き続き，(0，1) ÷ (1，−1) を筆算で計算．今度の商は 2 です．

$$
\begin{array}{rrr}
 & 2 & 1 \\ \cline{2-3}
(1,\ -1)\,\big) & (0,\ 1)\,\big) & (1,\ 0) \\
 & (2,\ -2) & (0,\ 1) \\ \cline{2-3}
 & (-2,\ 3) & (1,\ -1)
\end{array}
$$

Step ④　余り (−2，3) を (1，−1) の左側に書いて，引き続き，(1，−1) ÷ (−2，3) を筆算で計算．最後の商は 2 です．これで座標による筆算は終了．

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 2 & 2 & 1 \\ \cline{2-4}
(-2,\ 3)\,\big) & (1,\ -1)\,\big) & (0,\ 1)\,\big) & (1,\ 0) \\
 & (-4,\ 6) & (2,\ -2) & (0,\ 1) \\ \cline{2-4}
 & (5,\ -7) & (-2,\ 3) & (1,\ -1)
\end{array}
$$

Step ⑤　最初に計算した 通常の筆算 と 座標の筆算 を比較する．

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 2 & 2 & 1 \\ \cline{2-4}
6 \,\big) & 13 \,\big) & 32 \,\big) & 45 \\
 & 12 & 26 & 32 \\ \cline{2-4}
 & 1 & 6 & 13
\end{array}
\Longleftrightarrow
\begin{array}{rrrr}
 & 2 & 2 & 1 \\ \cline{2-4}
(-2,\ 3)\,\big) & (1,\ -1)\,\big) & (0,\ 1)\,\big) & (1,\ 0) \\
 & (-4,\ 6) & (2,\ -2) & (0,\ 1) \\ \cline{2-4}
 & (5,\ -7) & (-2,\ 3) & (1,\ -1)
\end{array}
$$

左の数字と右の座標が対応しています (各自で $45x+32y$ に x，y を代入して確認してみてください)．ということは，最後の余り 1 の部分に注目すると，数字 1 が座標 (5，−7) に対応することになるので，$45x+32y=1$ を満たす x，y が $(x,\ y)=(5,\ -7)$ となることが分かります．これが答えです．

この『座標筆算法』を用いれば，$ax+by=1$ をみたす x，y を確実に求めることができます．

✏注　この手法のベースは同僚の N 氏のアイデアによるものです．N 氏のアイデアはもっとシンプルなものですが，通常の筆算と対比させて考えると分かりやすいと思い，この『座標筆算法』を考案しました．同じような手法は他にもあるようです．自分なりの手法を独自に考えてみるのも勉強になると思います．

どんな方法でやろうが「とにかく 1 組見つかればそれでよい」のですから．