

座標筆算法に慣れよう

▷Point◁(☆座標筆算法☆)

$ax + by = 1$ を満たす (x, y) の求め方. (ただし, $a > b$ の場合)

$a \div b$ を通常の筆算で割り算をし, 商を確認する. その商を使って, もう一度, 座標で筆算を実行する. 最後の余りが 1 になったときの対応する座標が $ax + by = 1$ を満たす (x, y) である.

$a > b$ の場合は, $a \iff (1, 0)$, $b \iff (0, 1)$ が対応するが, $a < b$ の場合や, $ax - by = 1$ の場合などは, 最初の座標の置き方が変わるので注意を要する (詳しくは, 下の例題で確認すること).
なお, 念のため, 出てきた結果が正しいかどうか最後に確認することを忘れないようにしましょう.

$30x + 17y = 2$ ⇨注 $30 \iff (1, 0)$, $17 \iff (0, 1)$ に対応します.

考え方 $30x + 17y = 1$ を満たす x, y を考えて 2 倍します.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 3 \quad 1 \quad 1 \\
 4 \overline{) 13} \overline{) 17} \overline{) 30} \\
 \underline{12} \quad \underline{13} \quad \underline{17} \\
 1 \quad 4 \quad 13
 \end{array}
 \iff
 \begin{array}{r}
 3 \quad 1 \quad 1 \\
 (-1, 2) \overline{) (1, -1)} \overline{) (0, -1)} \overline{) (1, 0)} \\
 \underline{(-3, 6)} \quad \underline{(1, -1)} \quad \underline{(0, 1)} \\
 (4, -7) \quad (-1, 2) \quad (1, -1)
 \end{array}
 \end{array}$$

したがって, $(x, y) = (4, -7)$ が $30x + 17y = 1$ を満たします.

よって, $30x + 17y = 2$ を満たす x, y は, $(x, y) = (8, -14)$.

$29x + 42y = 5$ ⇨注 $42 \iff (0, 1)$, $29 \iff (1, 0)$ に対応します.

考え方 $29x + 42y = 1$ を満たす x, y を考えて 5 倍します.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 4 \quad 2 \quad 1 \\
 3 \overline{) 13} \overline{) 29} \overline{) 42} \\
 \underline{12} \quad \underline{26} \quad \underline{29} \\
 1 \quad 3 \quad 13
 \end{array}
 \iff
 \begin{array}{r}
 4 \quad 2 \quad 1 \\
 (3, -2) \overline{) (-1, 1)} \overline{) (1, 0)} \overline{) (0, 1)} \\
 \underline{(12, -8)} \quad \underline{(-2, 2)} \quad \underline{(1, 0)} \\
 (-13, 9) \quad (3, -2) \quad (-1, 1)
 \end{array}
 \end{array}$$

したがって, $(x, y) = (-13, 9)$ が $29x + 42y = 1$ を満たします.

よって, $29x + 42y = 5$ を満たす x, y は, $(x, y) = (-65, 45)$.

$46x - 35y = 4$ ⇨注 $46 \iff (1, 0)$, $35 \iff (0, -1)$ に対応します.

考え方 $46x - 35y = 1$ を満たす x, y を考えて 4 倍します.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 5 \quad 3 \quad 1 \\
 2 \overline{) 11} \overline{) 35} \overline{) 46} \\
 \underline{10} \quad \underline{33} \quad \underline{35} \\
 1 \quad 2 \quad 11
 \end{array}
 \iff
 \begin{array}{r}
 5 \quad 3 \quad 1 \\
 (-3, -4) \overline{) (1, 1)} \overline{) (0, -1)} \overline{) (1, 0)} \\
 \underline{(-15, -20)} \quad \underline{(3, 3)} \quad \underline{(0, -1)} \\
 (16, 21) \quad (-3, -4) \quad (1, 1)
 \end{array}
 \end{array}$$

したがって, $(x, y) = (16, 21)$ が $46x - 35y = 1$ を満たします.

よって, $46x - 35y = 4$ を満たす x, y は, $(x, y) = (64, 84)$.

$147x + 55y = 6$ \Rightarrow 注 $147 \iff (1, 0)$, $55 \iff (0, 1)$ に対応します.

考え方 $147x + 55y = 1$ を満たす x, y を考えて 6 倍します.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 2 \quad 1 \quad 2 \\
 18 \left) \begin{array}{l} 37 \\ 36 \\ 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} 55 \\ 37 \\ 18 \end{array} \left) \begin{array}{l} 147 \\ 110 \\ 37 \end{array} \\
 \hline
 \end{array} \\
 \iff \\
 \begin{array}{r}
 2 \quad 1 \quad 2 \\
 \left) \begin{array}{l} (1, -2) \\ (-2, 6) \\ (3, -8) \end{array} \right) \begin{array}{l} (0, 1) \\ (1, -2) \\ (-1, 3) \end{array} \left) \begin{array}{l} (1, 0) \\ (0, 2) \\ (1, -2) \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

したがって, $(x, y) = (3, -8)$ が $147x + 55y = 1$ を満たします.

よって, $147x + 55y = 6$ を満たす x, y は, $(x, y) = (18, -48)$.

$95x + 28y = 3$ \Rightarrow 注 $95 \iff (1, 0)$, $28 \iff (0, 1)$ に対応します.

考え方 $95x + 28y = 1$ を満たす x, y を考えて 3 倍します.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\
 5 \left) \begin{array}{l} 6 \\ 5 \\ 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} 11 \\ 6 \\ 5 \end{array} \left) \begin{array}{l} 28 \\ 22 \\ 6 \end{array} \left) \begin{array}{l} 95 \\ 84 \\ 11 \end{array} \\
 \hline
 \end{array} \\
 \iff \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\
 \left) \begin{array}{l} (-2, 7) \\ (3, -10) \\ (-5, 17) \end{array} \right) \begin{array}{l} (1, -3) \\ (-2, 7) \\ (3, -10) \end{array} \left) \begin{array}{l} (0, 1) \\ (2, -6) \\ (-2, 7) \end{array} \left) \begin{array}{l} (1, 0) \\ (0, 3) \\ (1, -3) \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

したがって, $(x, y) = (-5, 17)$ が $95x + 28y = 1$ を満たします.

よって, $95x + 28y = 3$ を満たす x, y は, $(x, y) = (-15, 51)$.

$56x - 73y = 5$ \Rightarrow 注 $73 \iff (0, -1)$, $56 \iff (1, 0)$ に対応します.

考え方 これまで通りに, $56x - 73y = 1$ を満たす x, y を考えて 5 倍してもかまいません. その場合, 下の座標筆算の結果より $(x, y) = (150, 115)$ となりますが, そんなことしなくても早い段階で答えが分かっけてしまいます. 通常の筆算の結果をじっくり見ると, 余りが 5 になる場所があります. ということは...

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 2 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 2 \left) \begin{array}{l} 5 \\ 4 \\ 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} 17 \\ 15 \\ 2 \end{array} \left) \begin{array}{l} 56 \\ 51 \\ 5 \end{array} \left) \begin{array}{l} 73 \\ 56 \\ 17 \end{array} \\
 \hline
 \end{array} \\
 \iff \\
 \begin{array}{r}
 2 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 \left) \begin{array}{l} (4, 3) \\ (-26, -20) \\ (30, 23) \end{array} \right) \begin{array}{l} (-1, -1) \\ (12, 9) \\ (-13, -10) \end{array} \left) \begin{array}{l} (1, 0) \\ (-3, -3) \\ (4, 3) \end{array} \left) \begin{array}{l} (0, -1) \\ (1, 0) \\ (-1, -1) \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

したがって, 余りが 5 になる場所に比較して, $56x - 73y = 5$ を満たす x, y は, $(x, y) = (4, 3)$.

最後に一言

大学入試で $ax + by = 1$ を満たす整数 x, y を見つける場合, たいていすぐに見つかるようになっていきます (問題作成者はそんなところを見たいんじゃないよ). 現実問題として, この『座標筆算法』を使わないと, どうしても見つからないような問題はほとんどありません. なので, あんまり深刻にならずに「なかなか面白い方法やなあ〜」と鑑賞する程度に留めておいて良いと思います.