

対数 Q & A



みんなの疑問に
答えるワッ!!

赤阪数学研究所に、対数に関する質問が続々と届いています。みんなも一緒に考えてください。

質問 1

ある問題集を解いていたら、

$$\log_{10}(x+2) + \log_{10}(x+5) = 1 \quad \dots\dots ①$$

の答えと、

$$\log_{10}(x+2)(x+5) = 1 \quad \dots\dots ②$$

の答えが違っていました。①を変形したら②になるのに答えが違うのはなぜですか？ 同じだと思うのですが……

質問の答え

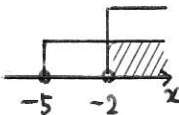
答えが違うのは当たり前です。

なぜなら、①と②では真数条件が違うからです。

「何はともあれ真数 > 0」を思い出そう。変形する前に真数条件を check せねばなりません。

①の場合、真数条件は、

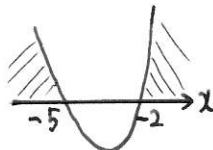
$$x+2 > 0 \text{ かつ } x+5 > 0$$



つまり、 $x > -2$ 。

②の場合、真数条件は、

$$(x+2)(x+5) > 0$$



つまり、 $x < -5, -2 < x$ 。

確かに、①を変形すると②になり、②を解くと $x = 0, -7$ と求まりますが、真数条件の違いから、

①の答えは $x = 0$

②の答えは $x = 0, -7$

となります。

ふん 〇
さいうことが

注 ②の解き方は大丈夫でしょうが念のため。

$$\log_{10}(x+2)(x+5) = 1$$

$$\log_{10}(x+2)(x+5) = \log_{10} 10^1$$

$$\text{よって、} (x+2)(x+5) = 10$$

$$x^2 + 7x = 0$$

$$x(x+7) = 0$$

$$x = 0, -7$$

このへんは
楽勝です OK

質問 2

テストで $(\log_{10} x)^2$ と書くべきところを、うっかり $\log_{10} x^2$ と書いてしまって減点されました。何がどう違うんですか？別に同じだと思うんですが……

質問の答え

これもよくやってしまうミスです。 $(\log_{10} x)^2$ と $\log_{10} x^2$ とでは全く意味が違うので、減点されるのも無理ありませんね。

次のように書くと違いが良くわかると思います。

$$(\log_{10} x) \times (\log_{10} x) = (\log_{10} x)^2$$

$$(\log_{10} x) + (\log_{10} x) = \log_{10} x^2$$

しっかり
区別
しようネ

全く違いますよね。 $\log_{10} x^2$ とは、 x^2 に \log_{10} がついてるだけであり、さらに $x > 0$ のときに限り

$$\log_{10} x^2 = 2 \log_{10} x$$

と真数部分の指数を対数の前に降ろすことができます。それに対し、 $(\log_{10} x)^2$ は、2を前に降ろすことができないので、これ以上どうにもなりません。

質問 3

次のような問題がテストで出たんです。

$$(1) (\log_{10} x)^2 + a \log_{10} x + b = 0 \text{ が}$$

実数解をもつ条件を求めよ。

$$(2) (2^x)^2 + a2^x + b = 0 \text{ が}$$

実数解をもつ条件を求めよ。

(1) は $\log_{10} x = t$, (2) は $2^x = t$ と置き換えすれば、どちらも同じ式 $t^2 + at + b = 0$ になるので、実数解をもつから $D \geq 0$ としたんですが、どういうわけか (1) は正解だったのに (2) は不正解だったんです。全く同じ式なのに納得いきません。

質問の答え

これもよくやってしまうミスです。文字を置き換えるときは、置き換えた文字に必ず条件(範囲)が付きます。 $\log_{10} x = t$ とおくと「 t は全ての実数」ですが、 $2^x = t$ とおくと「 $t > 0$ 」です。したがって、置き換えした後の式が全く同じであっても、実数解をもつ条件は異なります。(1)は t が全ての実数をとり得るので単に $D \geq 0$ でOKですが、(2)は「 $t > 0$ において実数解をもつ」となるので、「 $D \geq 0$ 」の他にもいろいろ条件が必要になってきます。どんな条件が必要かは自分で考えてください。

♡ はーい。数学Iの内容ですネ

質問 4

次のような問題がサッパリわかりません・・・

「 $10^{1+\log_{10} 3}$ と $100^{\log_{10} \sqrt{2}}$ の値を求めよ。」

↑ = コレへ ? ? ?

質問の答え

ああ、これも質問が多い問題ですね。たしかに、指数部分に対数があって一瞬戸惑ってしまいますが、どうってことはありません。ポイントは次の関係式です。

$$a^{\log_a M} = M$$

です。この式を見て「ああ、当たり前やなあ〜」と思えるかどうか。なぜなら、対数の定義

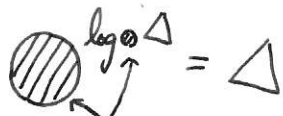
$$a^p = M \iff p = \log_a M$$

より、 $a^p = M$ に $p = \log_a M$ を代入すれば

$$a^{\log_a M} = M$$

となるからです。そもそも $\log_a M$ とは「 a を何乗すれば M になるのか」という意味なので、 a を $\log_a M$ 乗すれば M になるのは当たり前です。

つまり、...



この2>をそえることがポイントです。

♡ ナルホド

質問の答え

$$10^{1+\log_{10} 3} = 10^1 \times 10^{\log_{10} 3} = 10 \times 3 = 30$$

$$(10^{\log_{10} 10 + \log_{10} 3} = 10^{\log_{10} 30} = 30 \text{ でも OK})$$

$$100^{\log_{10} \sqrt{2}} = (10^2)^{\log_{10} \sqrt{2}} = 10^{2 \log_{10} \sqrt{2}}$$

$$= 10^{\log_{10} 2} = 10^{\log_{10} 2} = 2$$

上の♡部は、いずれも $\log_a \Delta$ の形になっています。とにかくこの形をつくることがポイントです。

指数・対数の計算規則

使いまくり〜

♡

OK〜

質問 5

4STEP 問題集に載ってる次の不等式

$$\log_{10} \frac{a+b}{2} \geq \frac{\log_{10} a + \log_{10} b}{2} \quad (a > 0, b > 0)$$

が、なんとなく美しい形をしているんですが、何か秘密があるんじゃないですか？ こんなことを考える僕って変ですか？

質問の答え

質問ありがとう。数式に美しさを感じ、何か秘密があるのでは、と感じる感性は素晴らしいです。これこそが真に数学的といえる思考なのです。君は全く変ではありません。その感性を大切にしてほしいと思います。

この問題は、不等式の右辺部分が

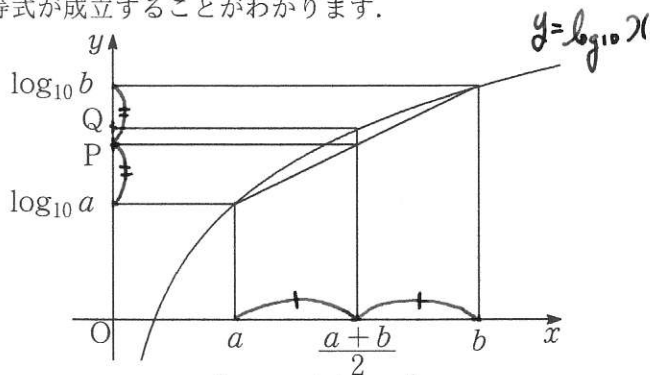
$$\frac{\log_{10} a + \log_{10} b}{2} = \frac{1}{2} \log_{10} ab = \log_{10} \sqrt{ab}$$

と変形できるので、結局のところ、

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

という、いわゆる相加相乗平均の不等式の証明をすればよいだけなのですが、君の言うようにこの不等式には面白い背景があります。それは $y = \log_{10} x$ のグラフと深く関わっています。

下の図を見てください。この図を見れば、問題の不等式が成立することがわかります。



図の P の y 座標が $\frac{\log_{10} a + \log_{10} b}{2}$ 、Q の y 座標が $\log_{10} \frac{a+b}{2}$ になるので、題意の不等式が成立していることがわかります。等号成立は P と Q が一致するとき、すなわち $a = b$ のときです。

この解法ポイントはグラフの凸性です。つまり $y = \log_{10} x$ のグラフが上に凸であることを証明すればよいのですが、これには数学 III の知識が必要なのでそのときにまた考えましょう。