3　指数や対数の大小比較

指数関数 $y = a^x$ や対数関数 $y = \log_a x$ のグラフはどちらも，$a > 1$ のとき増加，$0 < a < 1$ のとき減少なので，次の重要な事実が成立します．

▷Point◁(指数の大小比較)

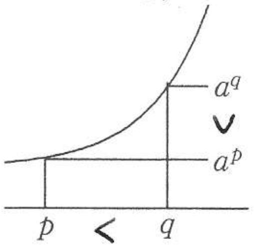
$a > 1$ のとき，グラフは単調増加なので，

$$p < q \iff a^p < a^q$$ 大小関係そのまま

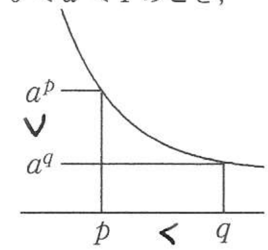
$0 < a < 1$ のとき，グラフは単調減少なので，

$$p < q \iff a^p > a^q$$ 向きが変わる

$a > 1$ のとき，



$0 < a < 1$ のとき，



【例】$3^2 < 3^5 < 3^7$　　$\left(\frac{1}{3}\right)^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^5 > \left(\frac{1}{3}\right)^7$

▷Point◁(対数の大小比較)

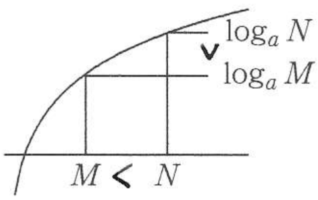
$a > 1$ のとき，グラフは単調増加なので，

$M < N \iff \log_a M < \log_a N$　大小関係そのまま

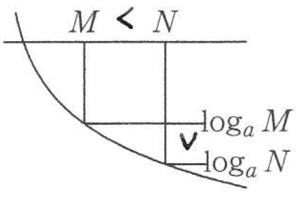
$0 < a < 1$ のとき，グラフは単調減少なので，

$M < N \iff \log_a M > \log_a N$　向きが変わる

$a > 1$ のとき，



$0 < a < 1$ のとき，



【例】　$\log_3 2 < \log_3 5 < \log_3 7$

$$\log_{\frac{1}{3}} 2 > \log_{\frac{1}{3}} 5 > \log_{\frac{1}{3}} 7$$

つまり，底がそろっていれば，真数の大小を比べるだけで指数・対数の値の大小比較ができるというわけです．いずれにしても，**底をそろえることがポイント**．

では，次にちょっとマニアックな大小比較問題を紹介しよう．

例題 次の数の大小比較をせよ．

(1) 2^{30}, 3^{20}, 10^{10}

(2) $\sqrt[4]{64}$, $\sqrt[3]{128}$, $\sqrt[7]{512}$

(3) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{7}$

(4) $\log_3 8$, $\log_9 16$, 2

(5) $\log_4 9$, $\log_9 25$, 1.5

(6) $\log_{0.3} 4$, $\log_2 4$, $\log_3 4$

パズルみたいに
気楽に考えよう
なかなかおもしろいよ

解 (1) まさかそのまま計算する人はいないと思います．指数がすべて 10 の倍数であることに注目すれば次のように比較可能です．

$2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}$,　　$3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}$

したがって，$8 < 9 < 10$ より，$8^{10} < 9^{10} < 10^{10}$.

$\therefore\ 2^{30} < 3^{20} < 10^{10}$.　■

注 この問題は底ではなく指数をそろえて比較してることを意識しよう．


フムフム

(2) 累乗根の形ではサッパリわからないのでを指数の形に変えます．64 や 128, 512 という数字をみればピンと気づいてほしいところ．

$\sqrt[4]{64} = 64^{\frac{1}{4}} = (2^6)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{2}}$,

$\sqrt[3]{128} = 128^{\frac{1}{3}} = (2^7)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{7}{3}}$,

$\sqrt[7]{512} = 512^{\frac{1}{7}} = (2^8)^{\frac{1}{7}} = 2^{\frac{8}{7}}$


ナルホド～

$\frac{8}{7} < \frac{3}{2} < \frac{7}{3}$ であり，$2 > 1$ なので

$2^{\frac{8}{7}} < 2^{\frac{3}{2}} < 2^{\frac{7}{3}}$.　　$\therefore\ \sqrt[7]{512} < \sqrt[4]{64} < \sqrt[3]{128}$.

■

(3) 先ほどと同様に指数の形にしますが，それだけではダメでもう少し工夫が必要です．

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{6}}$,

$\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{6}} = (3^2)^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{6}}$,

$\sqrt[6]{7} = 7^{\frac{1}{6}}$.　　$7 < 8 < 9$ より，$7^{\frac{1}{6}} < 8^{\frac{1}{6}} < 9^{\frac{1}{6}}$.

$\therefore\ \sqrt[6]{7} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.　■


指数を $\frac{1}{6}$ に
そろえたんか…
うまい!!

注 最初に全ての数を 6 乗して比較してもよいです．

(4) まずは底の変換公式を利用して底をそろえよう．なるべく小さな数でそろえた方がよいので，この場合は 3 でそろえます．

$$\log_9 16 = \frac{\log_3 16}{\log_3 9} = \frac{\log_3 4^2}{\log_3 3^2} = \frac{2\log_3 4}{2} = \log_3 4$$

$2 = \log_3 3^2 = \log_3 9$

$3 > 1$ より $\log_3 4 < \log_3 8 < \log_3 9$.

$\therefore\ \log_9 16 < \log_3 8 < 2$　■


これは OK

(5)　この問題は (4) と同じような状況ですが，(4) の方法を真似るとうまくいきません。今回は，3 つのものを比較するのにいきなり 3 つ同時に比較するのではなく，2 つずつに分けて比較するという手法をとります．

1.5 と $\log_4 9$ の大小比較

この比較は思いつかん

$1.5 = \dfrac{3}{2} = \log_4 4^{\frac{3}{2}} = \log_4 8$

したがって，$4 > 1$ より，$\log_4 8 < \log_4 9$.

よって，$1.5 < \log_4 9$

ムリ〜

1.5 と $\log_9 25$ の大小比較

$1.5 = \dfrac{3}{2} = \log_9 9^{\frac{3}{2}} = \log_9 27$

したがって，$4 > 1$ より，$\log_4 25 < \log_4 27$.

よって，$\log_9 25 < 1.5$

以上より，$\log_9 25 < 1.5 < \log_4 9$　■

(6)　この問題は底がバラバラですが真数が共通なので，底と真数を入れ換えれば一気に底がそろいます．

$$\frac{1}{\log_4 0.3},\quad \frac{1}{\log_4 2},\quad \frac{1}{\log_4 3}$$

分子が 1 で共通なので，分母だけに注目すればよいのですが，ここで，大抵の人は「分母が大きい方が逆数は小さくなる」と考えるようです．つまり，

$$\log_4 0.3 < \log_4 2 < \log_4 3$$

だから

エッ，あかんの？

$$\frac{1}{\log_4 0.3} > \frac{1}{\log_4 2} > \frac{1}{\log_4 3}$$

ナンデ？

としてしまうのです．しかしこれは大間違いです．

実は $A < B$ だからといって $\dfrac{1}{A} > \dfrac{1}{B}$ とは限りません．なぜなら，この関係は A と B が同符号のときのみ成立し，異符号のときは成立しないからです (試しに $A = -1, B = 2$ で考えてみてください).

今回の問題の場合，$\log_4 0.3 < 0$ であり，負の数は逆数にしてもやはり負の数なので

$\log_4 0.3 < 0$ これがポイント

そーゆーことか

$$\frac{1}{\log_4 2} > \frac{1}{\log_4 3} > \frac{1}{\log_4 0.3}$$

ナットク

よって，$\log_{0.3} 4 < \log_3 4 < \log_2 4$　■

> **演習** (2010 年慶應大学)
> 方程式 $6^x - 5 \cdot 3^x - 6 \cdot 2^x + 30 = 0$ の解のうちで一番大きい解の整数部分を求めよ．

考え方　なかなか勉強になる良い問題．大小比較については先ほど紹介した「間接比較」です．

解　$6^x - 5 \cdot 3^x - 6 \cdot 2^x + 30 = 0$ より，

$2^x \cdot 3^x - 5 \cdot 3^x - 6 \cdot 2^x + 30 = 0$

$(2^x - 5)(3^x - 6) = 0$

$2^x - 5 = 0$ より $2^x = 5$. よって，$x = \log_2 5$.

$3^x - 6 = 0$ より $3^x = 6$. よって，$x = \log_3 6$.

$\log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8$ より，$2 < \log_2 5 < 3$

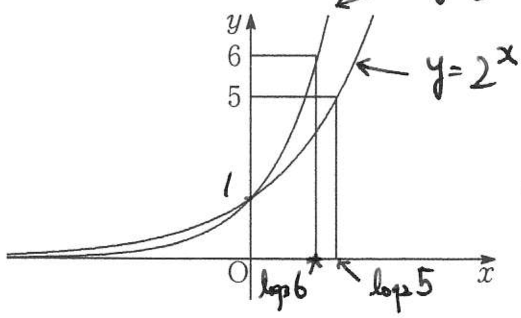
$\log_3 6 < \log_3 9$ より，$\log_3 6 < 2$

したがって，$\log_3 6 < 2 < \log_2 5 < 3$.

よって，大きいほうの解は $x = \log_2 5$ であり，その整数部分は 2 である．

■

参考　$y = 2^x$ と $y = 3^x$ のグラフを重ねてかくと，次のようになります．ともに点 $(0,\ 1)$ を通りますが，$x < 0$ のときと，$x > 0$ のときとでグラフの上下関係が入れかわっています．この 2 つのグラフの位置関係はとても重要です．

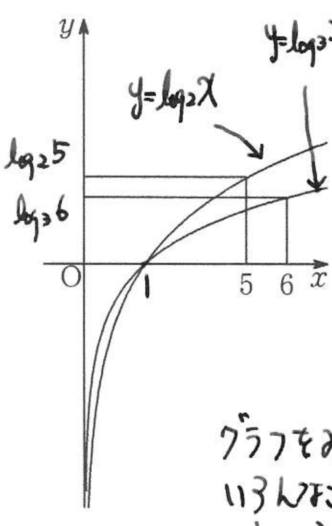


2つのグラフの位置関係に注目!!

じ〜っ

上の図を見れば，$2^x = 5$ の解 (つまり $\log_2 5$) と $3^x = 6$ の解 (つまり $\log_3 6$) の大小関係がすぐに分かります．

また，$y = \log_2 x$ と $y = \log_3 x$ のグラフを重ねてかくと，ともに点 $(1,\ 0)$ を通りますが，$0 < x < 1$ のときと，$x > 1$ のときとでグラフの上下関係が入れかわっています．この 2 つのグラフの位置関係はとても重要です．



したがって，上の図を見れば，$\log_2 5$ と $\log_3 6$ の大小関係がすぐに分かります (それぞれ $y = 2^x$ と $y = 3^x$ の逆関数なので上の図を $y = x$ に関して対称移動しただけですね).

グラフをみればいろんなことがわかるのね〜

単にグラフを書くだけとちがうよ